

*MATURA
ROZSZERZONA
MAJ 2026 r.*

FORMUŁA 2023

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-R0-100-2605

DATA: **11 maja 2026 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



Zadanie 1. (0-2)

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}$$

Zapisz obliczenia.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \binom{n+2}{n-1} &= \frac{(n+2)!}{(n-1)! [(n+2)-(n-1)]!} = \frac{\cancel{(n-1)!} \cdot n \cdot (n+1) (n+2)}{\cancel{(n-1)!} \cdot 3!} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot n(n^2 + 3n + 2) = \frac{1}{6}n^3 + 2n^2 + \frac{1}{3}n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n^3 + 2n^2 + \frac{1}{3}n}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^3} \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{n} + \frac{1}{3n^2} \right)}{\cancel{n^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^3} \right)} = \frac{\frac{1}{6} + 0 + 0}{\frac{1}{2} - 0 + 0} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Zadanie 2. (0-3)

Ze zbioru ośmiu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy bez zwracania osiem razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg zgodnie z kolejnością losowania.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowane liczby utworzą ciąg, w którym iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów będzie liczbą podzielną przez 3. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego. Zapisz obliczenia.

2.
0-1-
2-3

$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow n = 8$
 $k = 8, K1, BP \xrightarrow{n=k} \overline{\Omega} = n! \quad (1) \quad P(A) = ?$
 A - iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów jest liczbą podzielną na 3

(1) $\overline{\Omega} = 8! = 40320$

(2) Zbiór Z zawiera tylko dwie liczby podzielne na 3, więc należy je tak rozmieścić, aby każde trzy kolejne liczby zawierały "3" lub "6".

$\overline{A} = \underbrace{6, 5, 4, 3, 2, 1}_{\times 2} = 6! \times 2 = 720 \cdot 2 = 1440$

(3) $P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{6! \cdot 2}{8!} = \frac{2}{8 \cdot 7} = \frac{1}{28}$ ✓

Zadanie 3. (0-3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$\textcircled{2}: xy \in \mathbb{R}^+$$

$$\textcircled{1}:$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$$

$$\textcircled{2}:$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \quad / \cdot (xy)^2 > 0$$

$$xy^2 + x^2y \leq x^3 + y^3$$

$$xy(y+x) - (x+y)(x^2 - xy + y^2) \leq 0$$

$$- (x+y) [-xy + (x^2 - xy + y^2)] \leq 0$$

$$- (x+y) (x^2 - 2xy + y^2) \leq 0$$

$$- (x+y) (x-y)^2 \leq 0$$

$$\underbrace{\quad}_{>0} \underbrace{\quad}_{\geq 0} \leq 0$$

włp.c: $\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$

Zadanie 4. (0-3)

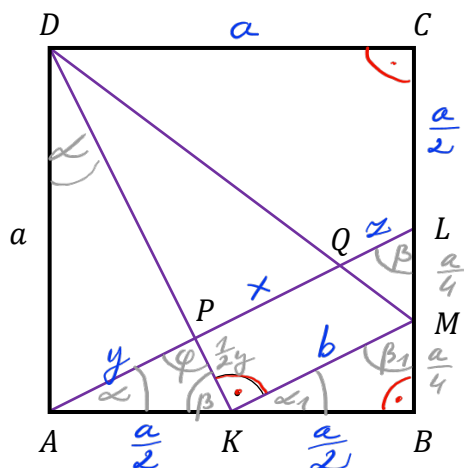
Punkty K i L są środkami – odpowiednio – boków AB i BC kwadratu $ABCD$ o boku długości a . Punkt M jest takim punktem na boku BC , że odcinki DK i KM są prostopadłe.

Odcinek AL przecina odcinki DK oraz DM w punktach – odpowiednio – P oraz Q (zobacz rysunek).

$$K = S_{AB}$$

$$L = S_{BC}$$

(Z)



(T)

Wykaż, że $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

(Z)

① $\triangle ABL$ – Tw. Pit.

$$|AL|^2 = |AB|^2 + |BL|^2$$

$$|AL|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|AL|^2 = \frac{5}{4}a^2 \quad | \sqrt{\cdot}, a \geq 0$$

$$|AL| = \frac{\sqrt{5}}{2}a = |DK|$$

③ $\triangle APK \sim \triangle AKD$ (α, β)

$$|PK| = \frac{1}{2}|AK| = \frac{1}{2}y$$

oraz

$$|AK| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AP|$$

$$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot y \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2}y = \frac{a}{2\sqrt{5}} \quad | \cdot 2\sqrt{5} \Rightarrow |PD| = |DK| - \frac{1}{2}y$$

$$|PD| = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{4a}{2\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

④ $x \parallel b$ w $\triangle KMD$: $\frac{x}{b} = \frac{|PD|}{|DK|} \Rightarrow x = \frac{|PD|}{|DK|} \cdot b = \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a}{\sqrt{5}}$

Tw. Talesa

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot a \quad \text{cnd.}$$

①b $\triangle ABL \equiv \triangle AKD$ (b.k.b.)

$$\alpha = |\angle LAB| = |\angle ADK|$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = |\angle ALB| = |\angle AKD|$$

$$\angle + \beta = 90^\circ \quad \wedge \quad \gamma = 90^\circ$$

④c $|\angle AKB| = 180^\circ$

$$\text{Więc } \alpha_1 = \alpha \quad \wedge \quad \beta_1 = \beta$$

② $\overline{KM} \parallel \overline{AL}$ Tales $|LM| = |MB| = \frac{a}{4}$

$$\text{oraz } |KM| = \frac{1}{2}|AL|$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

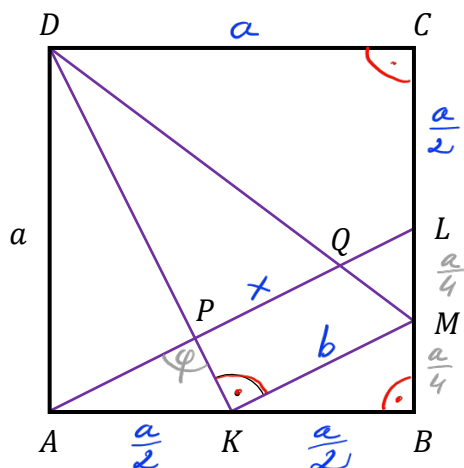
Zadanie 4. (0-3)

Punkty K i L są środkami – odpowiednio – boków AB i BC kwadratu $ABCD$ o boku długości a . Punkt M jest takim punktem na boku BC , że odcinki DK i KM są prostopadłe.

Odcinek AL przecina odcinki DK oraz DM w punktach – odpowiednio – P oraz Q (zobacz rysunek).

$$\begin{aligned} K &= S_{AB} \\ L &= S_{BC} \\ x &= |PQ| \\ b &= |KM| \end{aligned}$$

(Z)



(T)

Wykaż, że $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

(Z)

1 UMIESZCZAMY
RYSUNEK
W UKŁ. WSPÓŁRZĘD.

$$\begin{aligned} A(0,0) & \quad L(a, \frac{a}{2}) \\ B(a,0) & \quad K(\frac{a}{2}, 0) \\ C(a,a) & \quad M(a, y_M) \\ D(0,a) & \end{aligned}$$

2 dla $\vec{KD} \perp \vec{KM}$:
 $\vec{KD} \cdot \vec{KM} = 0$

$$[-\frac{a}{2}, a] \cdot [\frac{a}{2}, y_M] = 0$$

$$-\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + a \cdot y_M = 0$$

$$a \cdot y = \frac{a^2}{4} \quad | : a > 0$$

$$y_M = \frac{a}{4} \rightarrow M(a, \frac{a}{4}) = S_{AL}$$

$$\textcircled{3} \vec{AL} = [a, \frac{a}{2}]$$

$$\vec{KM} = [\frac{a}{2}, \frac{a}{4}] \rightarrow 2 \cdot \vec{KM} = \vec{AL} \Rightarrow \vec{AL} \parallel \vec{KM} \wedge \varphi = 90^\circ$$

$$\textcircled{4} A, L \in \text{pr. } AL: y = \frac{1}{2}x \rightarrow \text{pr. } AL: x - 2y = 0$$

$$\textcircled{4a} |DP| = d(D, \text{pr. } AL):$$

$$|DP| = \frac{|0 - 2a|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\textcircled{5} \triangle KMD \sim \triangle PQD \text{ (kk)}, \text{ lub Talesem}$$

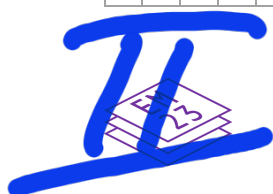
$$\frac{x}{b} = \frac{|DP|}{|DK|} \wedge b = |\vec{KM}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

$$\textcircled{4b} \vec{DK} = [\frac{a}{2}, -a]$$

$$|DK| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{|DP|}{|DK|} \cdot b = \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}a \text{ chod.}$$



5.

0-1-
2-3-4

Zadanie 5. (0-4)

Rozwiąż nierówność

$$|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$$

Zapisz obliczenia.

$$|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$$

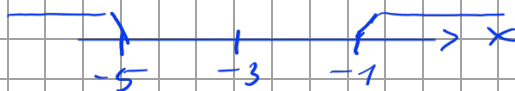
$$2|x - 3| - |x - 3||x + 3| < 0$$

$$|x - 3| \cdot (2 - |x + 3|) < 0$$

$$\underbrace{|x - 3|}_{> 0}$$

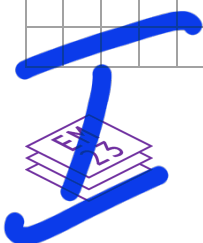
dla $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, więc

$$\text{dla } x \in \mathbb{R} - \{3\}, \text{ zostaje: } \begin{aligned} 2 - |x + 3| &< 0 \\ |x + 3| &> 2 \end{aligned}$$



$$x \in (-\infty; -5) \cup (-1; \infty) \quad \wedge \quad x \neq 3$$

$$\text{Odp: } x \in (-\infty; -5) \cup (-1; 3) \cup (3; \infty)$$



Zadanie 5. (0-4)

Rozwiąż nierówność

$$|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$$

Zapisz obliczenia.

$|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$
 $2|x - 3| - |x - 3||x + 3| < 0$
 $|x - 3| \cdot (2 - |x + 3|) < 0$

$\frac{|x-3|}{|x+3|} = \sqrt{\frac{-}{+}} \sqrt{\frac{+}{+}}$
 $p_1 \quad -3 \quad p_2 \quad 3 \quad p_3 \rightarrow x$

(1) $-(x-3)[2 + (x+3)] < 0$
 $-(x-3)(x+5) < 0$
 $x \in (-\infty; -5) \cup (3; \infty) \wedge p_1$

$x_1 \in (-\infty, -5)$

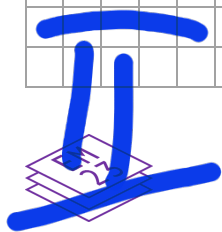
(2) $-(x-3)[2 - (x+3)] < 0$
 $-(x-3)(-x-1) < 0$
 $(x-3)(x+1) < 0$
 $x \in (-1; 3) \wedge p_2$

$x_2 \in (-1, 3)$

(3) $(x-3)[2 - (x+3)] < 0$
 $(x-3)(-x-1) < 0$
 $-(x-3)(x+1) < 0$
 $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty) \wedge p_3$

$x_3 \in (3; \infty)$

$x_1 \cup x_2 \cup x_3:$
 Odp: $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; 3) \cup (3; \infty)$



Zadanie 6. (0–4)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o skończonej liczbie wyrazów. Liczba wyrazów tego ciągu jest większa od 6. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 1, a ostatni wyraz tego ciągu jest równy (-2025) . Drugi, trzeci i szósty wyraz tego ciągu tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny.

6.

0–1–
2–3–4

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$n > 6 \wedge n \in \mathbb{N}^+$$

$$a_1 = 1$$

$$\textcircled{2} a_n = -2025 \rightarrow r \neq 0$$

$$\textcircled{1} (a_2; a_3; a_6) \rightarrow \text{c. geometr.}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = ?$$

$$\textcircled{2} 1 + (n-1) \cdot r = -2025$$

$$(n-1) \cdot r = -2026$$

$$(n-1) \cdot (-2) = -2026 \quad | :(-2)$$

$$n-1 = 1013$$

$$\underline{n = 1014}$$

$$\textcircled{1} a_3^2 = a_2 \cdot a_6$$

$$(1+2r)^2 = (1+r) \cdot (1+5r)$$

$$1+4r+4r^2 = 1+6r+5r^2$$

$$-r^2-2r = 0$$

$$-r(r+2) = 0 \quad \wedge \quad r \neq 0$$

$$\underline{r = -2}$$

$$\textcircled{3} S_{1014} = \frac{2 \cdot 1 + 1013 \cdot (-2)}{2} \cdot \overset{507}{\cancel{1014}} = (2-2026) \cdot 507$$

$$\underline{\underline{S_{1014} = -1026168}} \quad \checkmark$$



7.

0-1-
2-3-4

Zadanie 7. (0-4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) - 2 \sin(2x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

$$\begin{aligned} \sin(6x) - 2 \sin(2x) &= 0 \\ \sin(6x) - \sin(2x) - \sin(2x) &= 0 \\ 2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(4x) - \sin(2x) &= 0 \\ \sin(2x) \cdot [2 \cos(4x) - 1] &= 0 \quad \text{dla } k \in \mathbb{Z} \\ \sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos(4x) = \frac{1}{2} &\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{\pi}{3}, \pi \\ \text{I, IV dw.} \end{array} \right\} \\ 2x = k\pi \quad / : 2 & \\ x_1 = \frac{k\pi}{2} & \\ 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee & \quad 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / : 4 \\ x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} & \quad \vee \quad x_3 = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

Odp: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 8. (0-4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym. Długość okręgu opisanego na podstawie ABC jest równa $6\sqrt{2}\pi$, a cosinus kąta między krawędziami bocznymi SB i SC jest równy $\frac{5}{9}$.

Oblicz długość krawędzi podstawy ABC oraz cosinus kąta między ścianami bocznymi SAC i SBC tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

$a = |AB| = |BC| = |AC|$
 $H = |SO|$
 $k = |SA| = |SB| = |SC|$
 $R = |OA| = |OB| = |OC|$

① $L = 2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$
 ② $\cos \alpha = \frac{5}{9}$
 $x = |AF| = |BF|$

$a = ?$
 $\cos \beta = ?$

① $2\pi R = 6\sqrt{2}\pi \quad | \cdot \frac{1}{2\pi}$
 $R = 3\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
 ② $\frac{a}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} \quad | \cdot \sqrt{3}$
 $a = 3\sqrt{6}$

③ $\Delta BSE - Tw. Pit.$
 $h^2 + (\frac{a}{2})^2 = k^2$
 $h^2 = \frac{243}{4} - \frac{9 \cdot 6}{4} = \frac{189}{4} \quad | \sqrt{\quad}, h > 0$
 $h = \frac{3\sqrt{21}}{2}$

④ $P_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |BF|$
 $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot x \quad | \cdot \frac{4}{9}$
 $3 \cdot \sqrt{14} = \sqrt{13} \cdot x \quad | : \sqrt{13}$
 $x = \sqrt{42}$

⑤ $\Delta ABF - Tw. Cos.$
 $a^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \beta$
 $\cos \beta = \frac{2x^2 - a^2}{2x^2} = 1 - \frac{a^2}{2x^2}$
 $\cos \beta = 1 - \frac{9 \cdot 6}{2 \cdot 42} = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$

$a = |AB| = |BC| = |AC|$
 $H = |SO|$
 $k = |SA| = |SB| = |SC|$
 $R = |OA| = |OB| = |OC|$

① $L = 2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$
 ② $\cos \alpha = \frac{5}{9}$
 $x = |AF| = |BF|$

$a = ?$
 $\cos \beta = ?$

① $2\pi R = 6\sqrt{2}\pi \quad | \cdot \frac{1}{2\pi}$
 $R = 3\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
 ② $\frac{a}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} \quad | \cdot \sqrt{3}$
 $a = 3\sqrt{6}$

③ $\Delta BSE - Tw. Pit.$
 $h^2 + (\frac{a}{2})^2 = k^2$
 $h^2 = \frac{243}{4} - \frac{9 \cdot 6}{4} = \frac{189}{4} \quad | \sqrt{\quad}, h > 0$
 $h = \frac{3\sqrt{21}}{2}$

④ $P_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |BF|$
 $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot x \quad | \cdot \frac{4}{9}$
 $3 \cdot \sqrt{14} = \sqrt{13} \cdot x \quad | : \sqrt{13}$
 $x = \sqrt{42}$

⑤ $\Delta ABF - Tw. Cos.$
 $a^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \beta$
 $\cos \beta = \frac{2x^2 - a^2}{2x^2} = 1 - \frac{a^2}{2x^2}$
 $\cos \beta = 1 - \frac{9 \cdot 6}{2 \cdot 42} = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$

Zadanie 9. (0-5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (1, -1)$ oraz $B = (4, 0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , w którym $|CA| = |CB|$. Jedno z ramion trójkąta ABC zawiera się w prostej o równaniu $x + 2y - 4 = 0$. Na boku AC tego trójkąta obrano taki punkt M , że $|AM| : |MC| = 1 : 4$.

Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie M i przechodzi przez punkt C . Zapisz obliczenia.

9. 0-1- 2-3- 4-5

① $A(1, -1)$
 $B(4, 0)$
 $|CA| = |CB|$
 $l: x + 2y - 4 = 0$
 $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{1}{4} = \frac{x}{4x}$

② $S_{AB} = E(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ $\wedge C \in l \rightarrow C(4 - 2y_c, y_c)$
 $\vec{AB} = [3; 1] \rightarrow a = |AB| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

③ $\vec{AC} = [3 - 2y_c; y_c + 1]$ $\wedge |\vec{AC}|^2 = |\vec{BC}|^2 \wedge y_c = y$
 $[\vec{BC} = [-2y_c; y_c]]$
 $(3 - 2y)^2 + (y + 1)^2 = (2y)^2 + y^2$
 $9 - 12y + 4y^2 + y^2 + 2y + 1 = 5y^2$
 $-10y = -10 \quad | : (-10)$
 $y_c = 1 \rightarrow C(2; 1)$

④ $\vec{BC} = [-2, 1]$
 $5x = |BC| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \quad | : 5$
 $x = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow 4x = r = \frac{4}{\sqrt{5}}$

⑤ $\vec{AC} = 5 \cdot \vec{AM}$
 $[1, 2] = 5[x_M - 1; y_M + 1]$
 $1 = 5x_M - 5 \quad \wedge \quad 2 = 5y_M + 5$
 $6 = 5x_M \quad \wedge \quad -3 = 5y_M$
 $M(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5})$

⑥ $O_i: (x - \frac{6}{5})^2 + (y + \frac{3}{5})^2 = \frac{16}{5}$

10.

0-1-
2-3-
4-5

Zadanie 10. (0-5)

Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m , gdzie $m \neq 0$, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$$

ma dwa różne miejsca zerowe x_1 oraz x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$.

Zapisz obliczenia.

$f(x) = m^2 x^2 - 2mx + (1-m)$
 $m \neq 0$
 $f(x_1) = f(x_2) = 0 \Rightarrow \Delta > 0$
 $x_1 \neq x_2$
 $x_1, x_2 \in (-2, 2)$

ANALIZA PO WPROSZCZENIU:

(1) $m \neq 0$
 (2) $\Delta > 0$
 (3) $\begin{cases} m \cdot f(-2) > 0 \\ m \cdot f(2) > 0 \end{cases}$
 (4) $p \in (-2, 2) \wedge p = \frac{2m}{2m^2} = \frac{1}{m}$

I **II**

I $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta > 0 \\ f(-2) > 0 \\ f(2) > 0 \\ p \in (-2, 2) \end{cases}$ **II** $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta > 0 \\ f(-2) < 0 \\ f(2) < 0 \\ p \in (-2, 2) \end{cases}$

(1) $m \in \mathbb{R} - \{0\}$, (2) $(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 (1-m) > 0$
 $4m^2 \cdot [1 - (1-m)] > 0$
 $4m^3 > 0$
 $m > 0 \rightarrow m_2 \in (0; \infty)$

(3) $\begin{cases} m \cdot (4m^2 + 4m + 1 - m) > 0 \\ m \cdot (4m^2 - 4m + 1 - m) > 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} m(4m^2 + 3m + 1) > 0 \\ m(4m^2 - 5m + 1) > 0 \end{cases} \quad | : m > 0$

(4) $-2 < \frac{1}{m} < 2$
 $\frac{1}{m} > -2 \wedge \frac{1}{m} < 2 \quad | \cdot m > 0$
 $1 > -2m \wedge 1 < 2m \quad | : 2$
 $m > -\frac{1}{2} \wedge m > \frac{1}{2}$
 $m_4 \in (\frac{1}{2}; \infty)$

$m_1 \wedge m_2 \wedge m_3 \wedge m_4:$

$\begin{cases} m \in \mathbb{R}^+ \\ |m - \frac{5}{8}| > \frac{3}{8} \end{cases}$

$m_3 \in (0; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$

Odpr: $m \in (1; \infty)$

Zadanie 11. (0-6)

W czworokącie $ABCD$ są dane: $|AB| = 9$, $|AD| = 10$ oraz $|\angle BAD| = 60^\circ$.

W ten czworokąt wpisano okrąg oraz na tym czworokącie opisano okrąg (zobacz rysunek).

$$|AB| = 9$$

$$|AD| = 10$$

R - promień okręgu
opisanego na $ABCD$

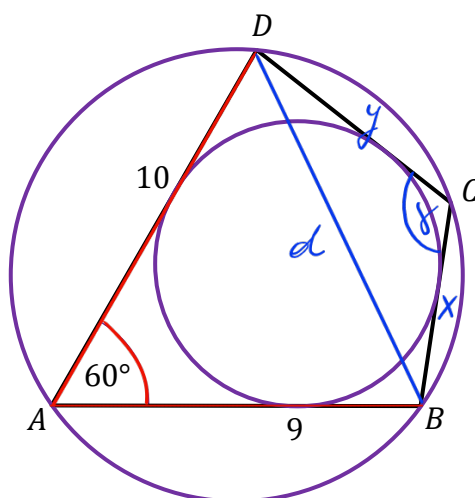
r - promień okręgu
wpisanego w $ABCD$

$$x = |BC|$$

$$y = |CD|$$

$$P = P_{ABCD}$$

$$d = |BD|$$



$$\begin{aligned} x &= ? \\ y &= ? \\ P &= ? \end{aligned}$$

11.

0-1-
2-3-
4-5-6

Oblicz długości boków BC i CD oraz pole czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

① CZWOROKĄT W I NA OKRĘGU:

$$\begin{aligned} 10 + x &= 9 + y & \wedge & \quad \delta + 60^\circ = 180^\circ \\ y &= x + 1 & \wedge & \quad \delta = 120^\circ \end{aligned}$$

② $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ - Tw. cosin.

$$\begin{aligned} d^2 &= 10^2 + 9^2 - 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ & \wedge & \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ d^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120^\circ & \wedge & \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ d^2 &= 181 - 180 \cdot \frac{1}{2} \\ d^2 &= x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$d^2 = 91$$

$$91 = x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + x$$

$$3x^2 + 3x - 90 = 0 \quad |:3$$

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$(x+6)(x-5) = 0 \quad \wedge \quad x > 0$$

$$\underline{\underline{x = 5}}, \quad \underline{\underline{y = 6}}$$

③

$$P = P_{ABD} + P_{BCD}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin 120^\circ$$

$$P = 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{45\sqrt{3}}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{\underline{P = 30\sqrt{3}}} \quad \checkmark$$



W projekcie ogrodu zaplanowano kwietnik w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie długości x metrów nieprzekraczającej 10 metrów. Na tym kwietniku ma znajdować się fontanna w kształcie koła o średnicy 4 metrów, które ma być styczne do każdego z boków trójkątnego kwietnika (zobacz rysunek). Projektantowi zależy, aby przy tak ustalonej wielkości fontanny pole tego kwietnika było najmniejsze.

$$|AC| = |BC|$$

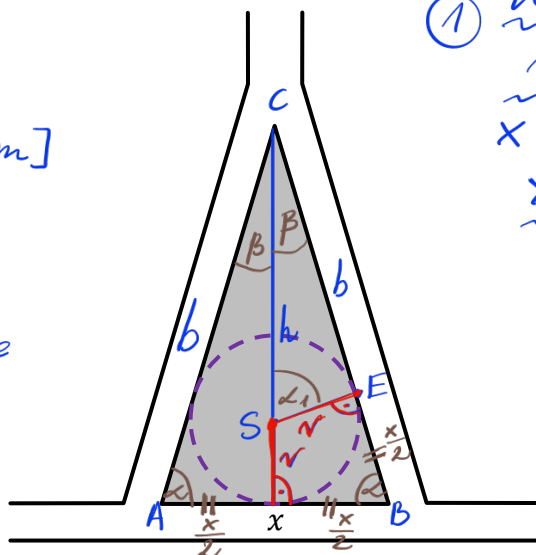
$$x = |AB| \leq 10 \text{ [m]}$$

$$2r = 4 \text{ [m]}$$

$$P_{ABC} = P(x) = \underbrace{NM}_{\text{najmniejsze}}$$

$$h = |CS|$$

$$b = |c \in I|$$



① WNIOSKI:

$$r = 2 \text{ [m]}$$

$$\overline{x > 2v} \wedge x \leq 10$$

$x \in (4; 10)$

STYCZNE DO OKRĘGU:

$$|FB| = |BE| = \frac{x}{2}$$

 $\triangle BCF:$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = |\angle FBC| \\ \beta = |\angle FCB| \end{array} \right\} \alpha + \beta = 90^\circ$$

 $\Delta SEC:$

$$\alpha_1 + \beta = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = \alpha$$

0-1-
2-3

Wykaż, że pole P (wyrażone w metrach kwadratowych) trójkątnego kwietnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

T.

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$



②

$$\Delta_{BCF} \sim \Delta_{SEC} (kk) \quad \wedge \quad h = |CS| \quad \wedge \quad b = |CF|$$

$$k = \frac{b + \frac{x}{2}}{h} = \frac{h+2}{b} = \frac{\frac{x}{2}}{2} \Rightarrow \frac{2b+x}{2h} = \frac{h+2}{b} = \frac{x}{4}$$

$$2hx = 4(2b+x) \quad | :x \quad h+2 = \frac{x}{4} \cdot b \quad | \cdot x$$

$$h = \frac{4b}{4} + 2 \quad \wedge \quad h = \frac{1}{4} \times b - 2$$

$$\frac{4b}{x} + 2 = \frac{xb}{4} - 2 \quad | \cdot 4x$$

$$16 \cdot b + 8x = bx^2 - 8x$$

$$16x = b(x^2 - 16) \quad / : (x^2 - 16) \neq 0$$

$$b = \frac{16x}{x^2 - 16}$$

$$b+x = \frac{16x + x(x^2 - 16)}{x^2 - 16} = \frac{x^3}{x^2 - 16}$$

$$\textcircled{3} \quad p = \frac{26 + 4 \cdot \frac{x}{2}}{2} = 6 + x$$

$$P = r \cdot p = 2(b+x)$$

$$P(x) = 2 \cdot \frac{x^3}{x^2 - 16}$$

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16} \quad \text{cnd}$$

Zadanie 12.2. (0-4)

Pole P trójkątnego kwietnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

dla każdego $x \in (4, 10]$.

$$P(x) = NM \quad / \quad \begin{matrix} x = ? \\ P = NM = ? \end{matrix}$$

12.2.

0-1-
2-3-4

Wyznacz długość x podstawy trójkątnego kwietnika, dla której pole tego kwietnika jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

④

$$P'(x) = \frac{6x^2(x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{2x^4 - 96x^2}{(x^2 - 16)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2}$$

$$P'(x) = \frac{2x^2(x - 4\sqrt{3})(x + 4\sqrt{3})}{(x - 4)^2(x + 4)^2} \quad \wedge \quad D' = D = (4; 10]$$

⑤ WkiWW:

$P'(x) = 0$ dla $x = 4\sqrt{3}$
 $P'(x) < 0$ dla $x \in (4; 4\sqrt{3})$
 $P'(x) > 0$ dla $x \in (4\sqrt{3}; 10]$
 $\Downarrow$
 $P \searrow$ dla $x \in (4; 4\sqrt{3})$
 $P \nearrow$ dla $x \in (4\sqrt{3}; 10]$

$\Rightarrow P_{\min}(4\sqrt{3}) = P_{NW}(4\sqrt{3})$

$$P(4\sqrt{3}) = \frac{2(4\sqrt{3})^3}{(4\sqrt{3})^2 - 16} = \frac{2 \cdot 4^3 \cdot 3\sqrt{3}}{16 \cdot 3 - 16} = \frac{6 \cdot 64\sqrt{3}}{16 \cdot 2} = \underline{\underline{12\sqrt{3}}}$$

Odp: $P = NM$ dla $\underline{\underline{x = 4\sqrt{3}}}$
 $\underline{\underline{P(4\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}}}$



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

