MATURA ROZSZERZONA MAJ 2024

FORMUŁA 2015

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **E-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2015*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
EMAP-R0-100-2405

DATA: **15 maja 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

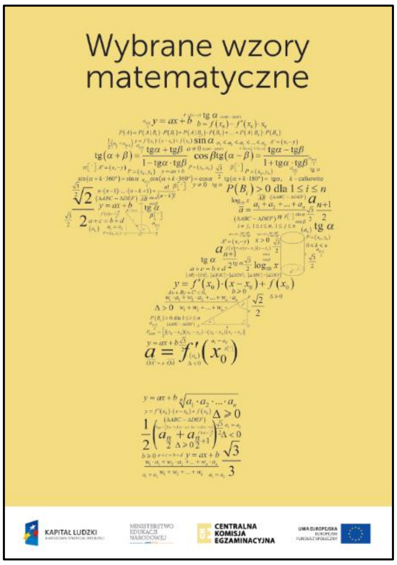
Uprawnienia zdającego do:
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ nieprzenoszenia odpowiedzi na kartę.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–16). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–16) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

$d = \frac{|5\cdot 6 - 12\cdot 2 + 1|}{\sqrt{25+144}} = \frac{7}{13}$

Odległość punktu $A = (6, 2)$ od prostej o równaniu $5x - 12y + 1 = 0$ jest równa

A. $\frac{7}{13}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{12}{13}$

Zadanie 2. (0–1)

(1) zał. $3x+1 \geq 0 \rightarrow 3x \geq -1 \rightarrow D: x \in \langle -\frac{1}{3}; \infty)$

Równanie $|2x - 4| = 3x + 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych

(2) $2x-4 = 3x+1 \;\vee\; 2x-4 = -3x-1$

$-x = 5 \;/(-1)$ $\qquad 5x = 3 \;/:5$

$x = -5 \notin D$ $\qquad x \in \frac{3}{5} \in D$

$x_1 = \frac{3}{5}$

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

Zadanie 3. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \underbrace{|-(x + 2)^3 + 5|}_{\geq 0}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A. $\langle -2, +\infty)$ B. $\langle 0, +\infty)$ C. $\langle 3, +\infty)$ D. $\langle 5, +\infty)$

Zadanie 4. (0–1)

Granica $\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 3a + 2ax + ax^3}{3 + 4x + 5x^2 + 5x^3}$ jest równa 3. Wtedy

A. $a = 3$ B. $a = 9$ C. $a = 15$ D. $a = 21$

$\frac{a}{5} = 3 \;/\cdot 5$

$a = 15$

Zadanie 5. (0–2)

Wielomian $W(x) = 8x^3 + 14x^2 + 5x + 3$ jest iloczynem wielomianów $P(x) = 2x + 3$ oraz $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – wartości współczynników: a, b oraz c.

4	1	1

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

(2) $W(x) = 8x^3 + 14x^2 + 5x + 3$

$P(x) = 2x + 3$

(1) $Q(x) = ax^2 + bx + c$ | $\underbrace{a, b, c}$?

$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$

(1) $P(x) \cdot Q(x) = (2x+3)(ax^2+bx+c)$

$= 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 3ax^2 + 3bx + 3c$

$= 2ax^3 + (2b+3a)x^2 + (2c+3b)x + 3c$

(2) $2a = 8 \; /:2 \quad \land \quad 2b + 3a = 14 \quad \land \quad 2c + 3b = 5$

$\underline{a = 4}$

$2b + 12 = 14$

$2b = 2 \; /:2$

$\underline{b = 1}$

$2c + 3 = 5$

$2c = 2 \; /:2$

$\underline{c = 1}$

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$, to $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a \cdot (1+b)}$.

Z: $\log_5 4 = a \wedge \log_4 3 = b$ ①

T: $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a(1+b)}$ ②

D:

① $\log_5 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 5} = \frac{1}{\log_4 5} = a \Rightarrow \log_4 5 = \frac{1}{a}$

②

$$\log_{12} 80 = \frac{\log_4 80}{\log_4 12} = \frac{\log_4 (4^2 \cdot 5)}{\log_4 (4 \cdot 3)} = \frac{\log_4 4^2 + \log_4 5}{\log_4 4 + \log_4 3} =$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{a}}{1+b} = \frac{2a+1}{a} \cdot \frac{1}{1+b} = \frac{2a+1}{a(1+b)}$$

dla: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq -1 \end{cases}$

$\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a(1+b)}$ cnd.

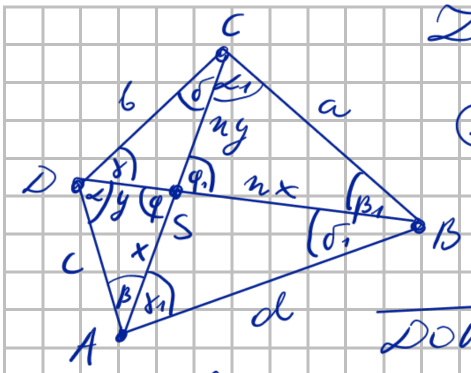
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

I Metoda

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątne AC oraz BD tego czworokąta przecinają się w punkcie S.

Wykaż, że jeżeli $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.



Z:

② $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$

T:

Na ABCD MOŻNA OPISAĆ OKRĄG.

$\Downarrow$

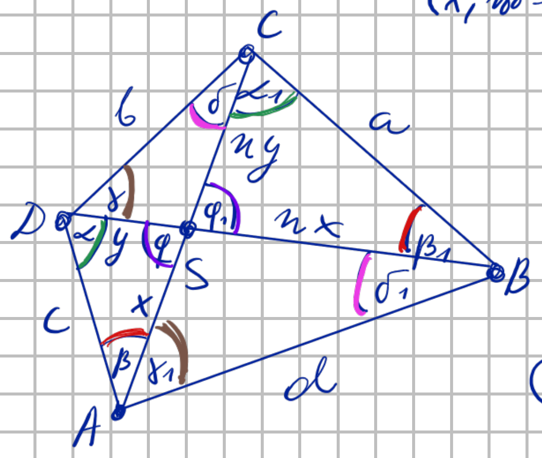
$|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$

DOWÓD:

① $\begin{cases} |\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle BSC| = \varphi = \varphi_1 \\ |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle DSC| = 180^\circ - \varphi \end{cases}$

② $\frac{x}{y} = \frac{nx}{ny} \xRightarrow{①\wedge②} \Delta ASD \underset{(x;\varphi,y)}{\overset{(bkb)}{\sim}} \Delta BSC \Rightarrow \begin{cases} a = nc \\ \beta_1 = \beta \\ \alpha_1 = \alpha \end{cases}$

③ $\frac{x}{nx} = \frac{y}{ny} \Rightarrow \Delta ASB \underset{(x;\,180^\circ-\varphi,\,nx)}{\overset{(bkb)}{\sim}} \Delta ASC \Rightarrow \begin{cases} d = nb \\ \gamma_1 = \gamma \\ \delta_1 = \delta \end{cases}$



④ $\Delta ASD \wedge \Delta BSC$

$\alpha + \beta + \varphi = 180^\circ$

$\underline{\alpha + \beta = 180^\circ - \varphi}$

⑤ $\Delta CDS \wedge \Delta ABS$

$\gamma + \delta + (180^\circ - \varphi) = 180^\circ$

$\gamma + \delta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$

$\Downarrow$

$(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) = 180^\circ$

$|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$

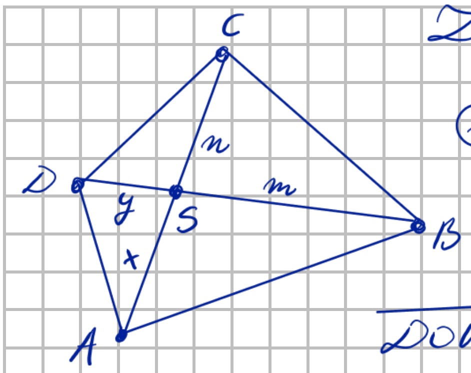
c.n.d.

II Metoda

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątne AC oraz BD tego czworokąta przecinają się w punkcie S.

Wykaż, że jeżeli $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.



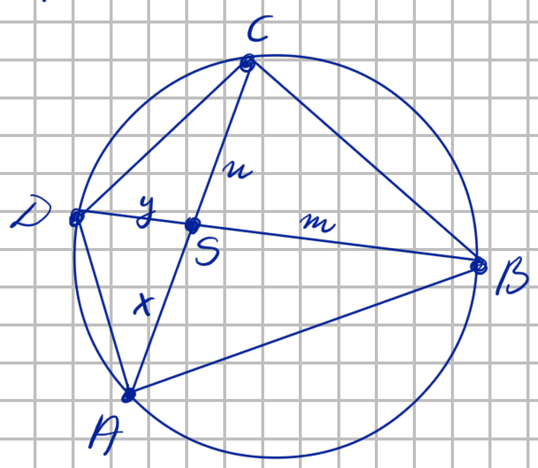
Z:

① $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$

T:

Na ABCD MOŻNA OPISAĆ OKRĄG.

DOWÓD:



① $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$

$\Downarrow$

$x \cdot n = y \cdot m$

Tw. odwrotne do Tw. o okręgu i punkcie (-tw o siecznych)

$\Downarrow$

NA ABCD MOŻNA OPISAĆ OKRĄG

cnd.

Zadanie 8. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakakolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste. Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb.

$n = 10$ (cyfry)

$k = 3+2 = 5$

kI (kolejność istotna)

BP (bez powtórzeń) $\rightarrow \overline{\overline{\Omega}} = V_n^k$ | $\overline{\overline{A}} = ?$

A – 3× „NP" i 2× „P"

$$\overline{\overline{A}} = \underbrace{\underset{NP}{5}\ \underset{NP}{4}\ \underset{NP}{3}\ \underset{P}{5}\ \underset{P}{4}}_{\times\binom{4}{2} = 6} + \underbrace{\underset{P}{4}\ \underset{P}{4}\ \underset{NP}{5}\ \underset{NP}{4}\ \underset{NP}{3}}_{\times\binom{4}{1} = 4}$$

NP: 1, 3, 5, 7, 9

P: $\cancel{0}$, 2, 4, 6, 8

$\overline{\overline{A}} = 3\cdot4^2\cdot5\times6 + 3\cdot4^3\cdot5\times4 =$

$= 3\cdot4^2\cdot5\,(5\times6 + 4\times4) =$

$= 240\cdot2\,(5\times3 + 4\times2) = 480\cdot(15+8)$

$= 480\cdot23 = \underline{\underline{11040}}$

Odp: Wszystkich takich liczb jest 11040.

Zadanie 9. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera. Punkt P, o pierwszej współrzędnej równej 2, należy do wykresu funkcji f. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P.

Oblicz współczynniki a oraz b w równaniu tej stycznej.

1 $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x} \wedge x \neq 0$

2 $P(2; y_0) = (x_0; y_0) \in f$

$s: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$s: y = ax + b$

$a = ?$
$b = ?$

1 $f(x) = x^2 - 3 + \frac{2}{x} \wedge D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2 $P(2; y_0) \in f \rightarrow \underline{P(2;2) = (x_0; y_0)}$

3 $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} \wedge D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4 $f(2) = 2$

$f'(2) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

5 $s: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = ax + b$

$s: y = \frac{7}{2}(x-2) + 2 = \frac{7}{2}x - 7 + 2$

$s: y = \frac{7}{2}x - 5 \Rightarrow$ Odp: $\begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = -5 \end{cases}$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.	9.
	Maks. liczba pkt	3	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 10. (0–3) Ω_1

Spośród wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, których wszystkie cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, losujemy jedną. Wylosowanie każdej z tych liczb jest jednakowo prawdopodobne.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy liczbę, która ma następującą własność: kolejne cyfry tej liczby (licząc od lewej strony) tworzą – w podanej kolejności – sześciowyrazowy ciąg malejący.

$Z_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \to n_1 = 8$

$k_1 = 6$, $Kl, P \to \overline{\overline{\Omega_1}} = n_1^{k_1}$ ①

$Z = \Omega_1 \Rightarrow n = \overline{\overline{\Omega_1}}$

$k = 1 \to \overline{\overline{\Omega}} = n = \overline{\overline{\Omega_1}}$

$P(A) = ?$

A – l. tworzą ciąg malejący → KN dla (a_n)

① $\overline{\overline{\Omega_1}} = 8^6 = 262144 = \overline{\overline{\Omega}} = n \Rightarrow \overline{\overline{\Omega}} = 2^{18}$

② $\overline{\overline{A}} = \binom{n}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$

albo

$\overline{\overline{A}} = \underbrace{8}, \underbrace{7}, \underbrace{6}, \underbrace{5}, \underbrace{4}, \underbrace{3} : 6!$ (bo KN) $=$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot \cancel{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} = \underbrace{28} = 2^2 \cdot 7$

③ $P(A) = \frac{2^2 \cdot 7}{2^{18}} = \frac{7}{2^{16}} = \frac{7}{65536}$

Odp: $P(A) = \frac{7}{65536}$

Zadanie 11. (0–4)

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Liczby x, y oraz z są – odpowiednio – pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Oblicz x, y oraz z.

③ $(x; y, z) \to$ c. geometr. ↗

② $x+y+z=105$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

① $\begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_6 = z \end{cases}$

$x, y, z = ?$

① $a_1 = x$

$a_2 = y = x + r$

$a_6 = z = x + 5r$

② $z = 105 - x - y$

②

$x + x + r + x + 5r = 105$

$3x + 6r = 105 \quad /:3$

$x + 2r = 35$

$x = 35 - 2r \to y = 35 - r \to z = 35 + 3r$

③ $y^2 = x \cdot z$

$(35-r)^2 = (35-2r)\cdot(35+3r)$

$(x+r)^2 = x\cdot(x+5r)$

$\cancel{x^2} + 2xr + r^2 = \cancel{x^2} + 5xr$

$r^2 - 3xr = 0$

$r(r - 3x) = 0$

$r = 0 \quad \vee \quad r = 3x$

spełnia dla (c.g)↗

$r = 3(35 - 2r)$

$r = 105 - 6r$

$7r = 105 \quad /:7$

$\boxed{r = 15}$

④

$\begin{cases} x = 35 - 30 = 5 \\ y = 35 - 15 = 20 \\ z = 35 + 45 = 80 \end{cases} \to$ Odp: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 20 \\ z = 80 \end{cases}$

Zadanie 12. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$$

w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$.

1

$2\sin x\cos x + \cancel{1} - 2\sin^2 x = \cancel{1} + \sin x - \cos x$

$2\sin x(\cos x - \sin x) + (\cos x - \sin x) = 0$

$(\cos x - \sin x)(2\sin x + 1) = 0 \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \sin x \quad \vee \quad 2\sin x = -1 \quad /:2$

2

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad (\text{III}, \text{IV})$

$\frac{\pi}{2} - x = x + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2} - x = \pi - x + 2k\pi$

$-2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad /:(-2) \quad \vee \quad \frac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi$

sprzeczne

$\underline{x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi} \quad \vee$

3 $\Downarrow$

$\begin{cases} x_2 \overset{\text{III}}{=} \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 \overset{\text{IV}}{=} \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

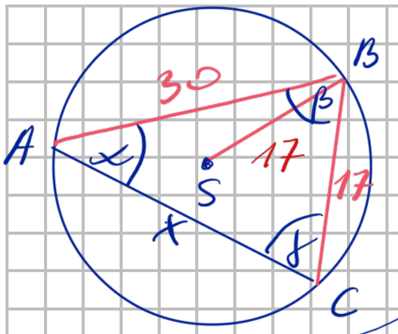
4

dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$:

Odp: $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$

Zadanie 13. (0–4)

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 17. Najdłuższym bokiem tego trójkąta jest bok AC, a długości dwóch pozostałych boków są równe $|AB| = 30$ oraz $|BC| = 17$. Oblicz miarę kąta BAC oraz długość boku AC tego trójkąta.



$O_1(S;R);\ R=17$

③ $|AC|>|AB|$

$|AB|=30$

$|BC|=17$

① $\alpha=?$

$x=|AC|=?$

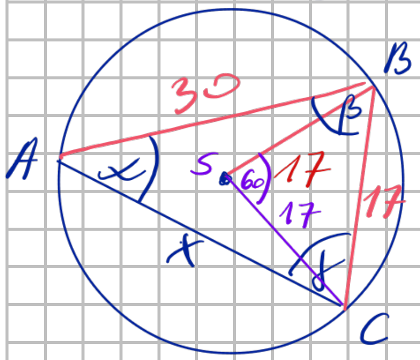
① $|SB|=|SC|=|BC|=R=17$

ΔBCS – równoboczny

$|\sphericalangle CSB|=60^\circ$, więc

$\overset{\frown}{BC}$: $\alpha=\frac{1}{2}|\sphericalangle CSB|$

$\alpha=30^\circ$



② ΔABC – Tw. cosin.

$17^2=x^2+30^2-2\cdot 30\cdot x\cos\alpha \ \wedge\ \cos\alpha=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$17^2=x^2+900-60x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$289=x^2-30\sqrt{3}x+900$

$x^2-30\sqrt{3}x+611=0$

$(x-15\sqrt{3})^2-675+611=0$

$(x-15\sqrt{3})^2=64\ /\sqrt{\ }\quad \wedge$ ③ $|AC|>|AB|$

$\Downarrow$

$|x-15\sqrt{3}|=8$

$x\in\{\underbrace{15\sqrt{3}-8}_{\approx 26};\ 15\sqrt{3}+8\}\ \wedge\ x>30$

Odp: $|AC|=15\sqrt{3}+8$

Zadanie 14. (0–5)

Środek S okręgu o promieniu $\sqrt{5}$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Przez punkt $A = (1, 2)$, którego odległość od punktu S jest większa od $\sqrt{5}$, poprowadzono dwie proste styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – B i C. Pole czworokąta $ABSC$ jest równe 15.

Oblicz współrzędne punktu S. Rozważ wszystkie przypadki.

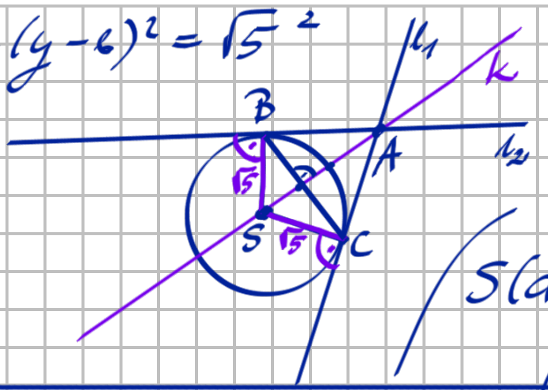
$O_1(S;\sqrt{5}):\ (x-a)^2+(y-b)^2=\sqrt{5}^2$

① $S \in k:\ y = x+1$

$A(1;2) \in (l_1 \wedge l_2)$

$|SA| > \sqrt{5}$

② $P_{ABSC} = 15$



$S(a,b) = ?$

① $f(1)=2 \rightarrow \underline{A \in k} \ \wedge\ S \in k \rightarrow \underline{S(a;\ a+1)}$

② $\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{5}\cdot|AB| = 15 \ \wedge\ |AB| = |CA|$

$\underline{|AB|} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \underline{3\sqrt{5}}$

③ ΔSAB – Tw. pit. $\wedge\ \overrightarrow{SA} = [1-a;\ 1-a]$

$|SA|^2 = \sqrt{5}^2 + |AB|^2$

$(1-a)^2+(1-a)^2 = 5 + 9\cdot 5$

$2\cdot(a-1)^2 = 50 \quad /:2$

$(a-1)^2 = 25 \quad /\sqrt{\ }$

$|a-1| = 5$

$a = 1+5 \ \vee\ a = 1-5$

$\begin{cases} a = 6 \\ b = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -4 \\ b = -3 \end{cases}$

Spr.

$|SA| > \sqrt{5} \quad /^2$

$|SA|^2 > 5$

$\Leftarrow\ 2(a-1)^2 > 5$

Odp: $\underline{\underline{S=(6;7)}} \ \vee\ \underline{\underline{S=(-4;-3)}}$

Zadanie 15. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2-(3m+1)\cdot x+2m^2+m+1=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3+x_2^3+3\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_1+x_2-3)\le 3m-7$$

$\Delta>0$ ① ② $m=?$

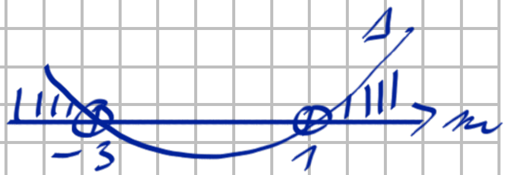
① $(3m+1)^2-4\cdot 1(2m^2+m+1)>0$

$9m^2+6m+1-8m^2-4m-4>0$

$m^2+2m-3>0$

$(m+3)(m-1)>0$

$m_1\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$



② $(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)+3x_1x_2(x_1+x_2-3)\le 3m-7$

$(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]+3x_1x_2(x_1+x_2-3)\le 3m-7$

$(x_1+x_2)^3\cancel{-3x_1x_2(x_1+x_2)}\cancel{+3x_1x_2(x_1+x_2)}-9x_1x_2\le 3m-7$

$(3m+1)^3-9(2m^2+m+1)\le 3m-7$

$27m^3+27m^2+9m+1-18m^2-9m-9-3m+7\le 0$

$27m^3+9m^2-3m-1\le 0$

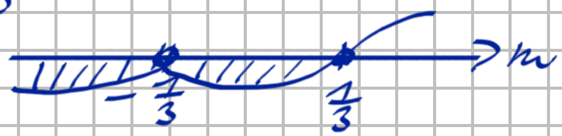
$9m^2(3m+1)-(3m+1)\le 0$

$(3m+1)(9m^2-1)\le 0$

$(3m+1)^2(3m-1)\le 0$

$27(m+\frac{1}{3})^2(m-\frac{1}{3})\le 0$

$m_2\in(-\infty;\frac{1}{3}\rangle$



③ $m_1\cap m_2$:

Odp: $m\in(-\infty;-3)$ ✓

Zadanie 16. (0–6)

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 3456, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż $8\sqrt{3}$.

a) Wykaż, że pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

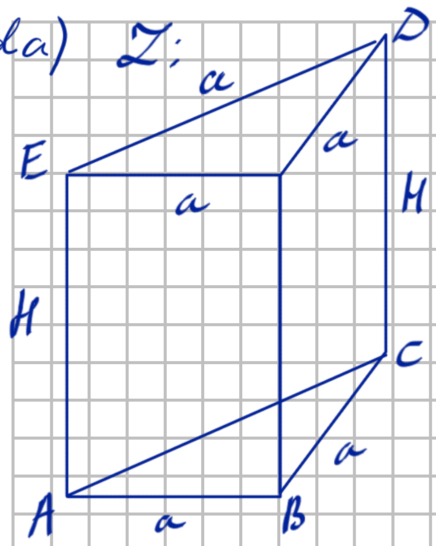
b) Pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0, 8\sqrt{3}\rangle$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

Ad a) Z:



① $V = 3456$

$a \in (0; 8\sqrt{3}\rangle$

② T: $P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$

D:

① $P_p \cdot H = 3456$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 3456$

$H = \frac{3456 \cdot 4}{a^2\sqrt{3}}$

② $P_c = 2P_p + P_b$

$P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\cancel{3}^{\sqrt{3}} \cdot 3456 \cdot 4}{a\cancel{\sqrt{3}}} = P(a)$

$P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$ dla $a \in (0; 8\sqrt{3}\rangle$

cnd

Ad. 6) $P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a} = P_{NM}$

$a \in (0; 8\sqrt{3}\rangle$

$a = ?$

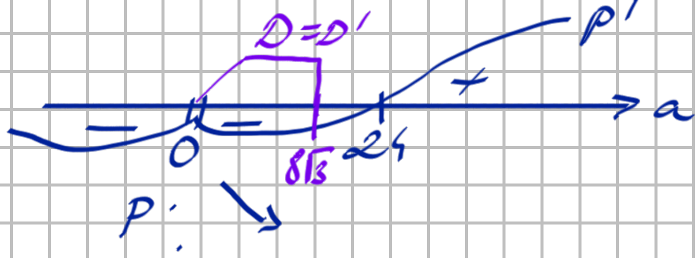
$P_{NM} = ?$

$8\sqrt{3} \approx 13{,}86$

① $P'(a) = a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}(a^3 - 24^3)}{a^2} = \frac{\sqrt{3}(a-24)(a^2+24a+24^2)}{a^2}$

② Wk i Ww:

$P'(a) < 0$ dla $a \in (0; 8\sqrt{3}\rangle$



③ dla $a = 8\sqrt{3} \Rightarrow P(a) = P_{NM}$

④ $P_{NM} = P(8\sqrt{3}) = \frac{\cancel{64}^{32}\cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \frac{13824\cancel{\sqrt{3}}}{8\cancel{\sqrt{3}}} = 96\sqrt{3} + 1728$

Odp: Pole całkowite graniastosłupa jest najmniejsze dla $a = 8\sqrt{3}$ i wynosi $96\sqrt{3} + 1728$.

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015