MATURA ROZSZERZONA MAJ 2023

FORMUŁA 2023

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny ***Formuła 2023***

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
MMAP-R0-**100**-2305

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐ dostosowania zasad oceniania

☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią.

DATA: **12 maja 2023 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

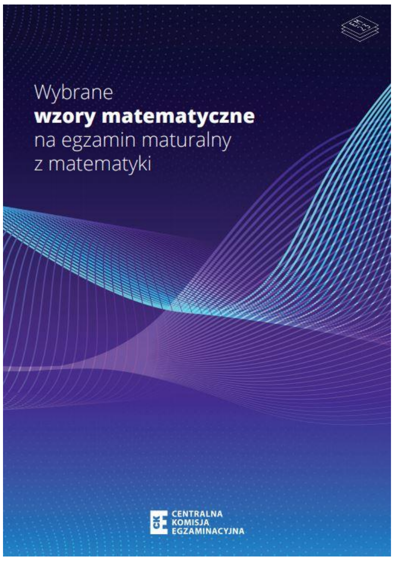
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 27 stron (zadania 1–13).
   Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.

Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej $(t = 0)$ masa substancji jest równa 4 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 19% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej).

1.
0–1–2

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od $1,5$ grama.
Zapisz obliczenia.

$m(t)$ – masa substancji w gramach po t dobach (liczone od $t_0 = 0$)

$t \in \mathbb{Z}^+$

1 $m(0) = 4$ [g]

19% – % masy ubywający z poprzedniej masy po każdej dobie

2 $m(t_i) < 1,5$ [g]

1 $m(t) = ?$

$t_i = ?$

1 $m(t) = 4 \cdot (100\% - 19\%)^t \rightarrow m(t) = 4 \cdot 0,81^t$

2 $4 \cdot 0,81^t < 1,5 \quad / : 4$

$0,81^t < 0,375 \quad \wedge \quad t \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{cases} 0,81^4 \approx 0,4305 > 0,375 \\ 0,81^5 \approx 0,3487 < 0,375 \end{cases}$$

$t_i = 5$

Odp: Po 5 dobach masa substancji będzie mniejsza od 1,5 grama.

Zadanie 2. (0–3)

Tomek i Romek postanowili rozegrać między sobą pięć partii szachów. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Tomka jest równe $\frac{1}{4}$.

Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

2.
0–1–2–3

$n = 5$ – liczba rozegranych partii szachów

$\frac{1}{4}$ – prawdopodobieństwo wygranie pojedynczej partii przez Tomka

A – Tomek wygrał co najmniej w 4 partiach z 5.

$P(A) = ?$ [ułamek nieskracalny]

$p = \frac{1}{4}$ → sukces (wygranie pojedynczej partii przez Tomka)

$q = 1 - p = \frac{3}{4}$

$n = 5$

$k = \{4; 5\}$. → „co najmniej 4" ⟺ „co 4 lub 5"

SCHEMAT BERNOULLIEGO

$$P(A) = P(k = \{4;5\}) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$= 5 \cdot \frac{3}{4^5} + 1 \cdot \frac{1}{4^5} = \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{16}{1024} = \frac{1}{64}$$

Odp: $P(A) = \frac{1}{64}$

Zadanie 3. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Punkt $P = (x_0, 3)$ należy do wykresu funkcji f.

3.
0–1–
2–3

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. Zapisz obliczenia.

1 $f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$

2

$P(x_0;3) \in f(x) \longrightarrow f(x_0) = 3$

$x_0 = ?$

$s: y = ax + b$?

5 $s: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

2 $\frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8} = 3 \quad / \cdot (x^2+2x+8)$

1 $x^2+2x+8 \neq 0$

$(x+1)^2 + 7 \neq 0$

$D_f: x \in \mathbb{R}$

$\cancel{3x^2} - 2x = \cancel{3x^2} + 6x + 24$

$-8 \cdot x = 24 \quad / : (-8)$

$x_0 = -3 \longrightarrow P(-3;3)$

3

$$f'(x) = \frac{(6x-2)(x^2+2x+8) - (3x^2-2x)(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2}$$

$$= \frac{\cancel{6x^3} + 12x^2 + 48x - 2x^2 - \cancel{4x} - 16 - \cancel{6x^3} - 6x^2 + 4x^2 + \cancel{4x}}{(x^2+2x+8)^2}$$

$$= \frac{8x^2 + 48x - 16}{(x^2+2x+8)^2}$$

4 $a = f(-3) = \frac{8 \cdot 9 - 48 \cdot 3 - 16}{(9 - 6 + 8)^2} = \frac{-88}{11^2} = -\frac{8}{11}$

5 $s: y = -\frac{8}{11}(x+3) + 3$

$s: y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$

Odp: Styczna do $f(x)$ w $x_0 = -3$ ma postać $s: y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$

Zadanie 4. (0–3)

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność $x^3 - x^2y \le xy^2 - y^3$.

Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

4. 0–1–2–3

Z: $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x^3-x^2y \le xy^2-y^3 \end{cases}$$

T:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

D:

$$x^3-x^2y \le xy^2-y^3$$

$$x^3-x^2y-xy^2+y^3 \le 0$$

$$x^2(x-y)-y^2(x-y) \le 0$$

$$(x-y)(x^2-y^2) \le 0$$

$$\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}\underbrace{(x+y)}_{4} \le 0$$

$$\Downarrow$$

$x-y=0 \quad \wedge \quad x+y=4$

$x=y \longrightarrow y+y=4$

$2y=4 \quad /:2$

$x=2 \longleftarrow y=2$

wyc:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

cnd.

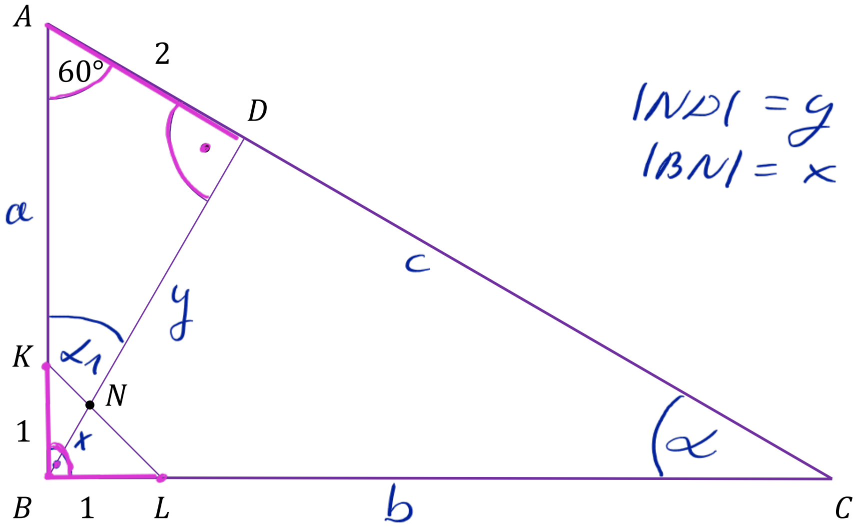
I METODA

Zadanie 5. (0–3)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60°$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N, a ponadto $|AD| = 2$.

Z:

$|ND| = y$
$|BN| = x$



T:

5.
0–1–2–3

Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

D:

① $\Delta ABC: \ \alpha + 60° = 90° \ \rightarrow \ \underline{\alpha = 30°}$

$\Delta ABD: \ \alpha_1 + 60° = 90° \ \rightarrow \ \alpha_1 = \alpha$

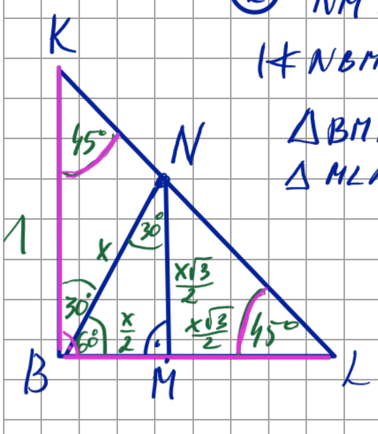
$\Delta ABD \ (30°, 60°, 90°) \ \rightarrow \ \underline{x + y = 2\sqrt{3}}$

② $\overline{NM} \perp \overline{BL} \ \rightarrow \ |BM| + |ML| = |BL| = 1$

$|\sphericalangle NBM| = 60° \ \wedge \ |\sphericalangle BNM| = 30° \ \wedge \ \alpha = 45°$

$\Delta BMN \ (30°, 60°, 90°) \ \Rightarrow \ |BM| = \frac{x}{2} \ \wedge \ |MN| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$\Delta MLN \ (45°, 45°, 90°) \ \Rightarrow \ |ML| = |MN| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$



$|BM| + |ML| = |BL|$

$\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{3}}{2} = 1 \quad / \cdot 2$

$x + x\sqrt{3} = 2$

$x(1 + \sqrt{3}) = 2 \quad / : (\sqrt{3} + 1)$

$\underline{x} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \underline{\sqrt{3} - 1}$

③ $x + y = 2\sqrt{3}$

$y = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1$

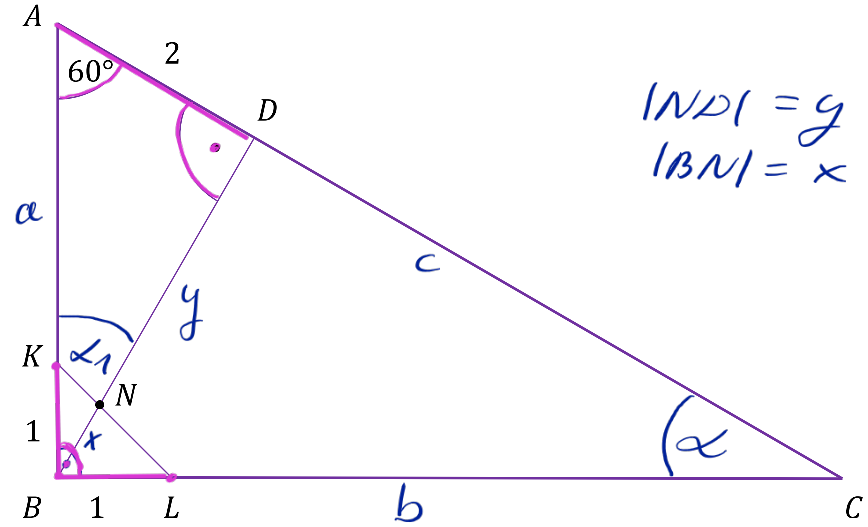
$|ND| = y = \sqrt{3} + 1$ cnd.

II METODA.

Zadanie 5. (0–3)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60°$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N, a ponadto $|AD| = 2$.

Z:



$|ND| = y$

$|BN| = x$

T:

5. 0–1–2–3

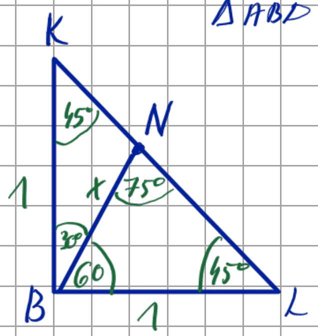
Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

D:

① $\Delta ABC:\ \alpha + 60° = 90° \rightarrow \boxed{\alpha = 30°}$

$\Delta ABD:\ \alpha_1 + 60° = 90° \rightarrow \alpha_1 = \alpha$

$\Delta ABD\ (30°, 60°, 90°) \rightarrow \boxed{x + y = 2\sqrt{3}}$



② $|\sphericalangle NBL| = 90° - \alpha_1 = 60°$

$|\sphericalangle BNL| = 75°$

③ ΔBLN – Tw. sin.

$\frac{x}{\sin 45°} = \frac{1}{\sin 75°} \quad \wedge \quad \sin 75° = \sin(45° + 30°) = \dots = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \underline{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}$

$\underline{x} = \frac{\sin 45°}{\sin 75°} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \underline{\sqrt{3}-1}$

④ $x + y = 2\sqrt{3}$

$y = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1$

$\underline{\underline{|ND| = y = \sqrt{3} + 1}}$ c.n.d.

6.

0–1–2–3

Zadanie 6. (0–3)

Rozwiąż równanie

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$$

Zapisz obliczenia.

① $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\alpha - \sin\beta$

$2\sin(4x)\cdot\cos(6x) = \sin(10x) - \sin(2x)$

② $2\cdot 2\sin(4x)\cdot\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$

$2\cdot[\sin(10x) - \sin(2x)] = 2\sin(10x) + 1$

$\cancel{2\cdot\sin(10x)} - 2\sin(2x) - \cancel{2\sin(10x)} = 1 \quad /:(-2)$

$\sin(2x) = -\frac{1}{2} \quad ; \ \alpha_0 = \frac{\pi}{6}, \ k\in\mathbb{Z}$

$2x_1 \overset{III}{=} \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \lor \quad 2x_2 \overset{IV}{=} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad /:2$

$x_1 = \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad \lor \quad x_2 = -\frac{\pi}{12} + k\pi$

Odp: $x = \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi \ ; \ \frac{7\pi}{12} + k\pi\right\}, \ k\in\mathbb{Z}$

I METODA

Zadanie 7. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).

a – KRAWĘDŹ SZEŚCIANU

$a = 6$

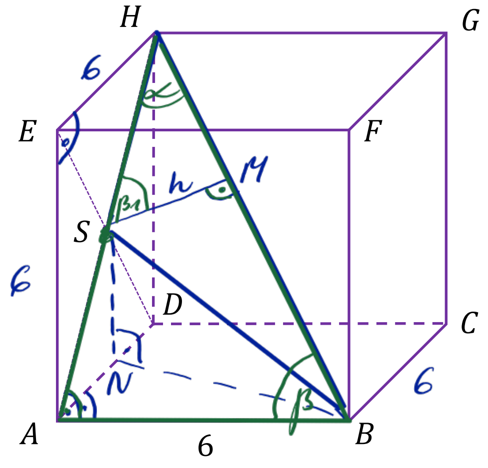
OZNACZENIA:

$\alpha = |\sphericalangle AHB|$

$\beta = |\sphericalangle ABH|$

$\beta_1 = |\sphericalangle HSM|$

$h = |SM| = ?$



Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

7.
0–1–2–3–4

① $\Delta AHE\ (45°, 45°, 90°)$: $|AH| = 6\sqrt{2} \rightarrow \underline{|SH| = 3\sqrt{2}}$

② oraz $\underline{|HB| = 6\sqrt{3}}$ → przekątna sześcianu

③ $\alpha + \beta = 90° \ \wedge \ \alpha_1 = \alpha$

$\Delta SMH \sim \Delta ABH$ (z cechy kk ⇒ α, β)

$\sin\alpha = \frac{h}{|SH|} = \frac{|AB|}{|HB|} \Rightarrow \frac{h}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}\sqrt{3}}$

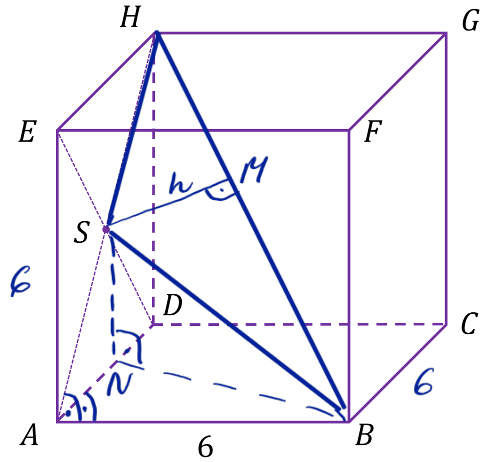
$h = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Odp. $\underline{\underline{h = \sqrt{6}}}$

II METODA

Zadanie 7. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



a – krawędź sześcianu

$a = 6$

$h = |SM| = ?$

Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

7.
0–1–2–3–4

① $|SH| = \frac{6\sqrt{2}}{2} = \underline{3\sqrt{2}}$, $\wedge$ $|HB| = \underline{6\sqrt{3}}$, $\wedge$ $|SN| = |AN| = \underline{3}$

② ΔANB:

$|NB|^2 = |AN|^2 + |AB|^2$

$|NB|^2 = 9 + 36$

$\underline{|NB|^2 = 45}$

③ ΔSNB

$|SB|^2 = |SN|^2 + |NB|^2$

$|SB|^2 = 9 + 45$

$|SB|^2 = 54 \quad /\sqrt{\ }$

$\underline{|SB| = 3\sqrt{6}}$

④ $P_{SBH} = P_{ABH} - P_{ABS}$

$P_{SBH} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}^{3} \cdot 6\sqrt{2} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}^{3} \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = \underline{9\sqrt{2}}$

⑤ $P_{SBH} = \frac{1}{2} \cdot |BH| \cdot h = \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}^{3}\sqrt{3} \cdot h = 9\sqrt{2}}$

$3\sqrt{3}h = 9\sqrt{2} \quad /:(3\sqrt{3})$

$h = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

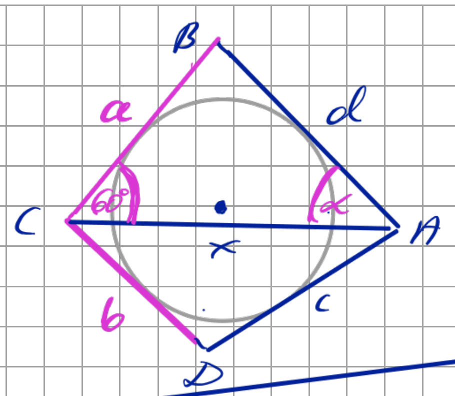
Odp. $\underline{\underline{h = \sqrt{6}}}$

Zadanie 8. (0–4)

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 4$ i $|CD| = 5$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego czworokąta tworzy z bokiem BC kąt o mierze $60°$, natomiast z bokiem AB – kąt ostry, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$.

8. 0–1–2–3–4

Oblicz obwód czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.



$|BC| = 4 = a$

$|CD| = 5 = b$

$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

$L_{ABCD} = L$

$x = |AC|$

$L = ?$

① ΔABC – Tw. sin

$\frac{d}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$\frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{4}} \quad / \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$d = 4 \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$d = 8\sqrt{3}$

② $\frac{1}{2}L = a + c = b + d \quad / \cdot 2$

$L = 2(b + d)$

$L = 2(5 + 8\sqrt{3})$

$L = 10 + 16\sqrt{3}$

9.

0–1–2–3–4

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$$

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ *dla każdej liczby rzeczywistej* a.

(1) $\sqrt{(x+2)^2} < \frac{25}{3} - \sqrt{(x-3)^2} \quad / \cdot 3$

$3|x+2| < 25 - 3|x-3|$

$|3x+6| + |3x-9| < 25$

	$(-\infty;-2)$	$\langle -2; 3)$	$\langle 3; \infty)$
$\lvert 3x+6 \rvert$	$-$	$+$	$+$
$\lvert 3x-9 \rvert$	$-$	$-$	$+$
	(1)	(2)	(3)

(1) $x \in (-\infty; -2)$

$(3x+6) - (3x-9) < 25 \quad / \cdot (-1)$

$3x+6+3x-9 > -25$

$6x > -22 \quad / : 6$

$x > -\frac{11}{3} \quad \wedge \quad (1) \longrightarrow x_1 \in \left(-3\frac{2}{3}; -2\right)$

(2) $x \in \langle -2; 3)$

$3x+6-(3x-9) < 25$

$15 < 25 \quad \wedge \quad (2) \longrightarrow x_2 \in \langle -2; 3)$

(3) $3x+6+3x-9 < 25$

$6x < 28 \quad / : 6$

$x < \frac{14}{3} \quad \wedge \quad (3) \longrightarrow x_3 \in \left\langle 3; 4\frac{2}{3}\right)$

$x_1 \cup x_2 \cup x_3$: Odp: $x \in \left(-3\frac{2}{3}; 4\frac{2}{3}\right)$

Zadanie 10. (0–4)

Określamy kwadraty K_1 , K_2 , K_3 , … następująco:

- K_1 jest kwadratem o boku długości a
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,

- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.

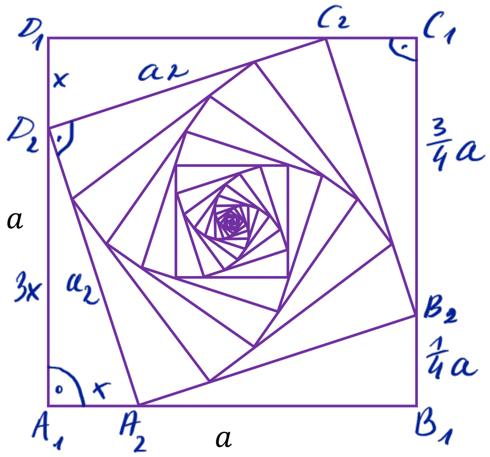
Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.

$a_1 = |A_1B_1| = |B_1C_1| = |C_1D_1| = |A_1D_1|$

$a_1 = a$

S – suma obwodów wszystkich kwadratów

① $\frac{|D_1D_2|}{|D_2A_1|} = \frac{1}{3}$



$S = ?$

10. 0–1–2–3–4

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

① $|D_1D_2| + |D_2A_1| = a$

$x + 3x = a$

$4x = a$

$|D_1D_2| = \frac{1}{4}a$

$|D_2A_1| = \frac{3}{4}a = |A_1A_2|$

② $\Delta A_1A_2D_2 : \ |A_2D_2|^2 = |A_1D_2|^2 + |A_1A_2|^2$

$a_2^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2$

$a_2^2 = \frac{10}{16}a^2 \quad / \sqrt{\ }, \ a_2 > 0$

$a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$

② L_n – obwód kwadratu o boku a_n $\wedge$ $n \in N^+$

$(L_n) = (4a_1, 4a_2; 4a_3; \ldots) = (4a; \sqrt{10}a, \sqrt{10}^2 a; \sqrt{10}^3 a; \ldots)$

$\frac{L_n}{L_{n-1}} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\sqrt{10}\,a}{4a} = \frac{\sqrt{10}}{4} = q \in (-1;1) \ \wedge \ L_1 = 4a$

③ $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{1} \cdot \frac{4}{4-\sqrt{10}} = \frac{16a}{4-\sqrt{10}} \cdot \frac{4+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}}$

$S = \frac{\overset{8}{\cancel{16}}a(4+\sqrt{10})}{\underset{3}{\cancel{6}}}$

Odp: $S = \frac{8}{3}(4+\sqrt{10}) \cdot a$

11.
0–1–2–3–4–5

Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0 \qquad \Leftrightarrow f(x)=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$. Zapisz obliczenia.

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

① $x_1 \neq x_2 \longrightarrow \Delta > 0$

② $x_1^3 + x_2^3 > -28$

$m = ?$

① $\Delta > 0 \land m \neq 2$

$4^2 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{m-3}{m-2} > 0 \quad /:4$

$\frac{4(m-2)+(m-3)}{m-2} > 0$

$\frac{5m-11}{m-2} > 0$

$5(m - \frac{11}{5})(m-2) > 0$

$m_1 \in (-\infty; 2) \cup (2\frac{1}{5}; \infty)$

② $(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) > -28$

$(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2] > -28$

$(-4) \cdot [(-4)^2 + 3 \cdot \frac{m-3}{m-2}] > -28 \quad /:(-4)$

$\frac{16(m-2)+3(m-3)}{m-2} < 7$

$\frac{19m-41-7(m-2)}{m-2} < 0$

$\frac{12m-27}{m-2} < 0$

$12(m - \frac{9}{4})(m-2) < 0$

$m_2 \in (2; 2\frac{1}{4})$

③ $m_1 \cap m_2$:

Odp: $m \in (2\frac{1}{5}; 2\frac{1}{4})$

Zadanie 12.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$ dla każdej liczby dodatniej x.

12.1.
0–1–2

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x wyrażenie

$$\mathbf{81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x}$$

można równoważnie przekształcić do postaci $x^4 + x^2 - 6x$.

Z: $f(x) = 81^{\log_3 x} + \frac{2\log_2\sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$

$x > 0$

T: $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$ dla $x > 0$

D:

① $f(x) = (3^4)^{\log_3 x} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \log_2 3^{\frac{3}{2}} \cdot \log_3 2 \cdot x^2 - 6x =$

$= \underbrace{3^{\log_3 x^4}}_{x^4} + \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}}_{1} \cdot \underbrace{\log_2 3 \cdot \log_3 2}_{1} \cdot x^2 - 6x \wedge x > 0$

$\wedge$

$x > 0$ $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$

cnd.

ZASTOSOWANE WZORY:

$\log_a b \cdot \log_b c = 1$

$\log_a a^n = n$

$\log_a b^x = x \cdot \log_a b$

Zadanie 12.2. (0–4)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji f określonej dla każdej liczby <u>dodatniej</u> x. Zapisz obliczenia.

12.2. 0–1–2–3–4

Wskazówka: przyjmij, że wzór funkcji f można przedstawić w postaci $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$.

① $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$

$D_f = (0; \infty)$

f_{NM} – najmniejsza wartość f

$f_{NM}(x) = ?$

② $f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 4x^3 - 4x + 6x - 6$

$= 4x(x-1)(x+1) + 6(x-1) =$

$= (x-1)[4x(x+1)+6] = (x-1)(4x^2+4x+6)$ $\Delta < 0$

$D_{f'} = D_f = (0; \infty)$

③ Wk i WW:

$f'(x) = 0$ dla $x = 1$

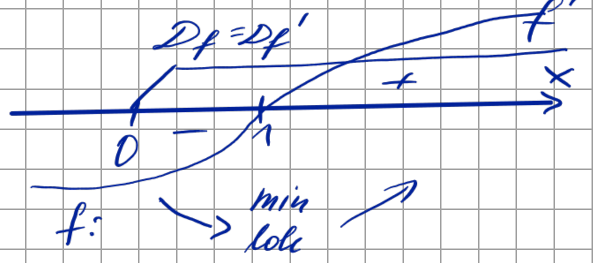
$f'(x) < 0$ dla $x \in (0; 1)$

$f'(x) > 0$ dla $x \in (1; \infty)$

⇓

$f \searrow$ dla $x \in (0; 1\rangle$

$f \nearrow$ dla $x \in \langle 1; \infty)$



④ ⇒ dla $x = 1$ funkcja $f(x)$ przyjmuje minimum lokalne, które jest najmniejszą wartością tej funkcji. (f_{NM})

$f_{NM}(1) = -4$

Odp: Najmniejsza wartość funkcji f wynosi -4.

Zadanie 13. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta l o równaniu $x - y - 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = 4x^2 - 7x + 1$ w punktach A oraz B. Odcinek AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$. Punkt C leży na okręgu $\mathcal{O}$ nad prostą l, a kąt BAC jest ostry i ma miarę α taką, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).

DANE:

③ $l: x - y - 2 = 0$

$f: y = 4x^2 - 7x + 1$

① $A(x_A; y_A) \in (l \cap p)$

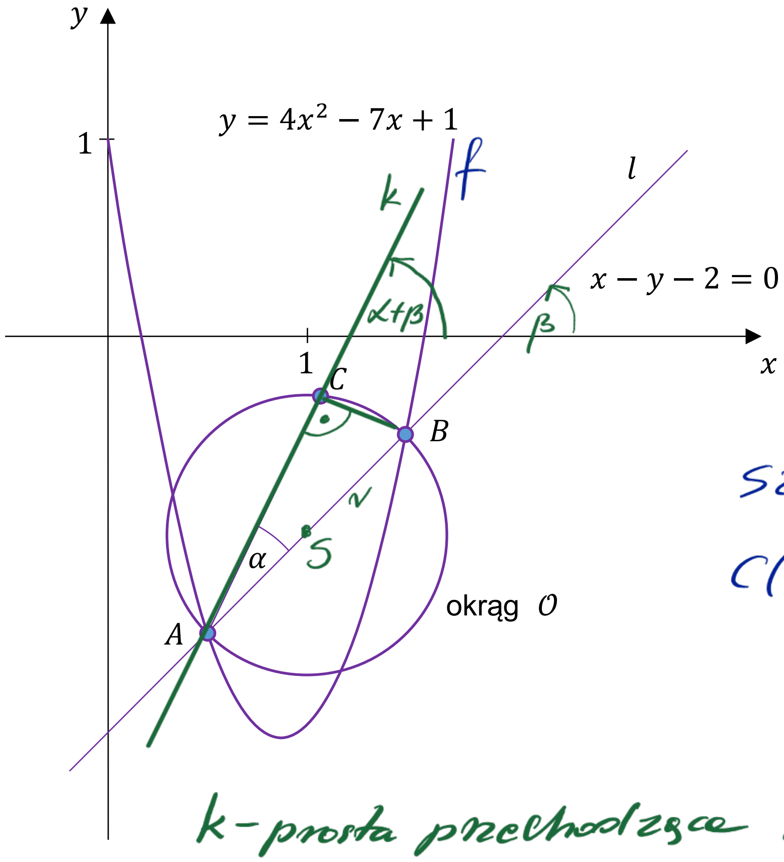
$B(x_B; y_B) \in (l \cap p)$

② $|AB| = 2r$

$C \in o(S, r)$

$\alpha \in (0°; 90°)$

③ $tg\alpha = \frac{1}{3}$



SZUKANE:

$C(x_C; y_C) = ?$

k – prosta przechodząca przez A i C

13. 0–1–2–3–4–5–6

Oblicz współrzędne punktu C. Zapisz obliczenia.

① $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y = 4x^2 - 7x + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = x - 2 & \boxed{1} \\ x - 2 = 4x^2 - 7x + 1 & \boxed{2} \end{cases}$

$\boxed{2}$ $4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad /:4$

$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$

$(x-1)^2 = \frac{1}{4} \quad /\sqrt{\ }$

$|x - 1| = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \lor \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right); \ B\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

② $|AB| = 2r \rightarrow |\measuredangle ACB| = 90°$

$\overrightarrow{AB} = [1; 1] \rightarrow |AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 2r$

$S_{AB} = S = (1; -1) \ \land \ r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$O(S, r): (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$

③ $l: y = x - 2 \rightarrow tg\beta = 1 \ \land \ tg\alpha = \frac{1}{3}$

$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} = \dfrac{\frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{3} \cdot 1} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$

④ $k: y = 2x + b \ \land \ A \in k \ \land \ C \in k$

$-\frac{3}{2} = 1 + b$

$b = -\frac{5}{2} \rightarrow k: y = 2x - \frac{5}{2}$

—

⑤ $A, C \in O(S, r)$ → układ. równań

$$\begin{cases} k: y = 2x - \frac{5}{2} & \boxed{1} \\ O: (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2} & \boxed{2} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $(x-1)^2 + (2x - \frac{5}{2} + 1)^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 - 2x + 1 + (2x - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = 0$

$5x^2 - 8x + \frac{11}{4} = 0 \quad /:5$ → „albo z Δ"

$x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{11}{20} = 0$

$(x - \frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25} - \frac{11}{20} = \frac{9}{100} \quad /\sqrt{\ }$

$|x - \frac{4}{5}| = \frac{3}{10}$

$x = \frac{8 \mp 3}{10} = \{\frac{1}{2}; \frac{11}{10}\}$

$x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{11}{10} \in x_C$

$\underbrace{\in x_A}$

bo $A = (\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$

$\underbrace{x_C = \frac{11}{10}}$ → $y_C = 2 \cdot \frac{11}{10} - \frac{5}{2}$

$\underbrace{y_C = -\frac{3}{10}}$

Odp: $C = (\frac{11}{10}; -\frac{3}{10})$

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023