# Matura rozszerzona maj 2022

*W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.*

**Zadanie 1. (0–1)** $= \log_3\sqrt{3^3} - \frac{\log_3\sqrt{3}}{\log_3 27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} - \frac{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 3^3} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$

Liczba $\log_3 \sqrt{27} - \log_{27} \sqrt{3}$ jest równa

**A.** $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{11}{12}$ **D.** $3$

**Zadanie 2. (0–1)** $f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}}$ ; $f'(x) = 2x+2$ ; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}+2 = 3$

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$.

Wartość pochodnej tej funkcji dla argumentu $x = \frac{1}{2}$ jest równa

**A.** $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $3$ **D.** $\frac{54}{8}$

**Zadanie 3. (0–1)** ② $\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\beta \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \cos\beta \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

Jeżeli $\cos\beta = -\frac{1}{3}$ i $\beta \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, to wartość wyrażenia $\sin\left(\beta - \frac{1}{3}\pi\right)$ jest równa

① $\sin\beta = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

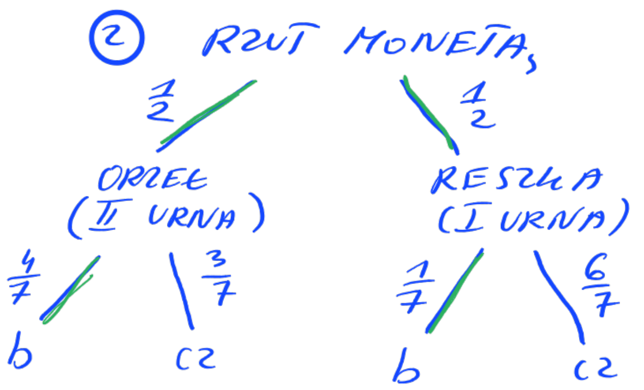
**A.** $\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

**Zadanie 4. (0–1)**

Dane są dwie urny z kulami. W każdej z urn jest siedem kul. W pierwszej urnie są jedna kula biała i sześć kul czarnych, w drugiej urnie są cztery kule białe i trzy kule czarne.
Rzucamy jeden raz symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie reszka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku – jedną kulę z drugiej urny.
Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy kulę białą w tym doświadczeniu, jest równe

**A.** $\frac{5}{14}$ **B.** $\frac{9}{14}$ **C.** $\frac{5}{7}$ **D.** $\frac{6}{7}$

①
I URNA: $n_1 = 1b + 6cz = 7$
II URNA: $n_2 = 4b + 3cz = 7$
A – wylosowano kulę białą




③ $P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{5}{14}$

**Zadanie 5. (0–2)**

Ciąg $(a_n)$ jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = \frac{(7p-1)n^3+5pn-3}{(p+1)n^3+n^2+p}$,

gdzie $p$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Oblicz wartość $p$, dla której granica ciągu $(a_n)$ jest równa $\frac{4}{3}$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

| 4 | 1 | 1 |
|---|---|---|

## BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

1 $a_n = \frac{(7p-1)n^3+5pn-3}{(p+1)\cdot n^3+n^2+p}$

$p = ?$

$p \in \mathbb{R}^+$

$, \_\ \_\ \_$

2 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$

1 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{7p-1}{p+1}$

2 $\frac{7p-1}{p+1} = \frac{4}{3}$

$21p - 3 = 4p + 4$

$17p = 7 \quad /:17$

$p = \frac{7}{17} \approx 0,\underline{411}76$

## Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ i dla każdej liczby rzeczywistej $y$ takich, że $2x > y$, spełniona jest nierówność

$$7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$$

Z: $x, y \in \mathbb{R}$ 
$2x > y$

T: $7x^3+4x^2y \geq y^3+2xy^2-x^3$

D: (1) PRZEKSZTAŁCAM TEZĘ RÓWNOWAŻNIE:

$7x^3+4x^2y \geq y^3+2xy^2-x^3$

$8x^3+4x^2y-2xy^2-y^3 \geq 0$

$4x^2(2x+y)-y^2(2x+y) \geq 0$

$(2x+y)\cdot(4x^2-y^2) \geq 0$

$(2x+y)(2x+y)(2x-y) \geq 0 \quad \wedge \quad 2x > y$

(2) $\underbrace{(2x+y)^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(2x-y)}_{>0} \geq 0 \quad \wedge \quad 2x-y>0$

$\bigwedge_{2x>y} (2x+y)^2\cdot(2x-y) \geq 0$

więc: $7x^3+4x^2y \geq y^3+2xy^2-x^3$

cnd.

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 5. | 6. |
|---|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 2 | 3 |
| | Uzyskana liczba pkt | | |

**Zadanie 7. (0–3)**

Rozwiąż równanie:

$$|x-3| = 2x+11$$

① Zał.: $2x+11 \geq 0$

$2x \geq -11 \;/ : 2$

$\boxed{x \in \langle -5\tfrac{1}{2}; \infty)}$

② $|x-3| = 2x+11 \quad \wedge \quad \rightarrow$

$x-3 = 2x+11 \quad \vee \quad x-3 = -2x-11$

$-x = 14 \;/ \cdot(-1) \qquad 3x = -8 \;/ : 3$

$x = -14 \notin$ zał. $\qquad x = -\frac{8}{3}$

$\boxed{x = -2\frac{2}{3}} \in$ zał.

Odp: $x = -2\frac{2}{3}$

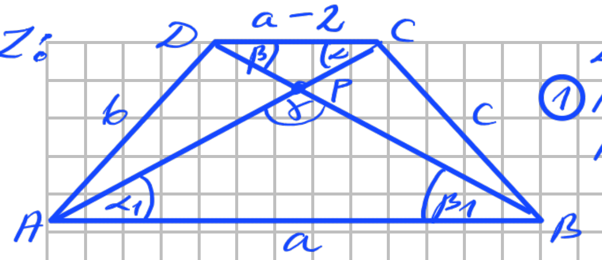
I Metoda

**Zadanie 8. (0–3)**

Punkt $P$ jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Długość podstawy $CD$ jest o $2$ mniejsza od długości podstawy $AB$. Promień okręgu opisanego na trójkącie <u>ostrokątnym</u> $CPD$ jest o $3$ mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie $APB$.

Wykaż, że spełniony jest warunek $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$.

Z:




$\overline{DC} \parallel \overline{AB} \wedge \gamma \in (0^\circ; 90^\circ)$ ③

① $R_1$ – PROMIEŃ OKRĘGU OPISANEGO NA $\Delta CPD$

$R_2$ – 〃 〃 〃 〃 $\Delta APB$

② $R_1 + 3 = R_2$

T: $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$

---

D: ① $2R_2 = \frac{a}{\sin\gamma} \wedge 2R_1 = \frac{a-2}{\sin\gamma} \quad /:2$

$R_2 = \frac{a}{2\sin\gamma} \wedge R_1 = \frac{a-2}{2\sin\gamma}$

② $R_2 = R_1 + 3 \iff \frac{a}{2\sin\gamma} = \frac{a-2}{2\sin\gamma} + 3 \quad / \cdot 2\sin\gamma > 0$

$a = a - 2 + 6\sin\gamma$

$2 = 6\sin\gamma \quad /:6$

$\underline{\sin\gamma = \frac{1}{3}}$

③ $\begin{cases} \sin\gamma = \frac{1}{3} \\ \gamma \in (0^\circ; 90^\circ) \end{cases} \Rightarrow \underline{\cos\gamma} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

④ $\Delta DPC$ – Tw. cosin.

$|DP|^2 + |CP|^2 - 2|DP| \cdot |CP| \cdot \cos\gamma = |CD|^2 \wedge \cos\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = 2 \cdot |DP| \cdot |CD| \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CD|$

cnd.

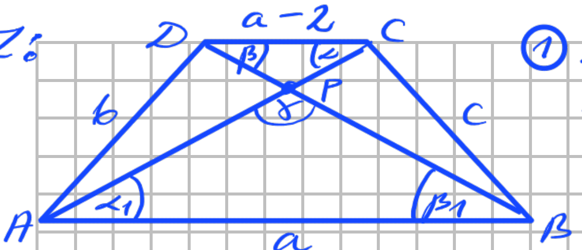
II Metoda

**Zadanie 8. (0–3)**

Punkt $P$ jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Długość podstawy $CD$ jest o $2$ mniejsza od długości podstawy $AB$. Promień okręgu opisanego na trójkącie <u>ostrokątnym</u> $CPD$ jest o $3$ mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie $APB$.

Wykaż, że spełniony jest warunek $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$.

Z:




① $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ∧ $\gamma \in (0°; 90°)$

$R_1$ – promień okręgu opisanego na $\Delta CPD$

$R_2$ – ″ ″ ″ ″ $\Delta APB$

② $R_1 + 3 = R_2$

T: $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$

D: ① $\overline{DC} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} |\measuredangle DCP| = \gamma \\ \alpha_1 = \alpha \\ \beta_1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \Delta APB \sim \Delta DPC$ (kkk)

skala podobieństwa: $k = \frac{a}{a-2} = \frac{R_2}{R_1}$ ②

$aR_1 = (a-2)R_2 \wedge R_1 + 3 = R_2$

$aR_1 = (a-2)(R_1+3)$

$\cancel{aR_1} = \cancel{aR_1} + 3a - 2R_1 - 6$

$2R_1 = 3(a-2)$

③ $\Delta DCP$ – Tw. sin.:

$2R_1 = \frac{a-2}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{a-2}{2R_1} = \frac{a-2}{3(a-2)} = \frac{1}{3}$

④ $2\sin\gamma = \frac{a}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{3} \quad /:2$

$\begin{cases} \sin\gamma = \frac{1}{3} \\ \gamma \in (0°; 90°) \end{cases} \Rightarrow \cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

⑤ $\Delta DPC$ – Tw. cosin.:

$|DP|^2 + |CP|^2 - 2|DP| \cdot |CP| \cdot \cos\gamma = |CD|^2 \wedge \cos\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = 2 \cdot |DP| \cdot |CD| \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CD|$

cnd

**Zadanie 9. (0–4)**

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m + 1)x - 2m$ przez dwumian $x + 2$ jest równa $(-30)$.

Oblicz $m$ i dla wyznaczonej wartości $m$ rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

$W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m+1)x - 2m$

① $W(-2) = -30$

② $W(x) \geq 0$

$m = ?$

$x = ?$

① $4\cdot(-2)^3 - 6\cdot(-2)^2 + 2(5m+1) - 2m = -30 \quad /:2$

$-16 - 12 + 5m + 1 - m = -15$

$4m = 12 \quad /:4$

Odp.: $m = 3$

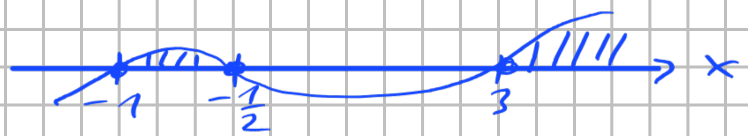
② $4x^3 - 6x^2 - 16x - 6 \geq 0 \quad /:2$

$2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \geq 0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | $-3$ | $-8$ | $-3$ | |
| ~~$x_0 = 1$~~ | ~~2~~ | ~~$-1$~~ | ~~$-9$~~ | ~~$6 \neq 0$~~ | |
| $x_0 = 3$ | 2 | 3 | 1 | 0 | $(x-3)$ |
| $x_0 = -1$ | 2 | 1 | 0 | | $(x+1)$ |

$(x-3)(x+1)(2x+1) \geq 0$

$2(x-3)(x+1)(x+\frac{1}{2}) \geq 0$




Odp: $x \in \langle -1; -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 3; \infty)$

**Zadanie 10. (0–4)**

Ciąg $(a_n)$, określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Ponadto $a_1 = 675$ i $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$.

Ciąg $(b_n)$, określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny.

Suma wszystkich wyrazów ciągu $(a_n)$ jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu $(b_n)$. Ponadto $a_3 = b_4$. Oblicz $b_1$.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} > 0 \rightarrow q > 0$

$a_1 = 675$

1. $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$

$b_n = b_1 + (n-1)\cdot r \quad \wedge \quad S = \frac{a_1}{1-q}$ dla $|q| < 1$

$b_1 = ?$

2. $S = S'_{25} \quad \wedge \quad S'_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$

3. $a_3 = b_4$

1. $a_1 q^{21} = \frac{5}{4}\cdot a_1 q^{22} + \frac{1}{5}a_1 q^{20} \quad /\cdot \frac{20}{a_1 q^{20}} > 0$

$20q = 25\cdot q^2 + 4$

$25q^2 - 20q + 4 = 0$

$(5q-2)^2 = 0$

$5q = 2 \quad /:5$

$\underline{q = \frac{2}{5} \in (-1;1)} \quad \wedge \quad a_1 = 675$

2. $\frac{a_1}{1-q} = \frac{2b_1 + 24r}{2}\cdot 25$

$\frac{675}{1-\frac{2}{5}} = (b_1 + 12r)\cdot 25 \quad /:25$

$27 : \frac{3}{5} = b_1 + 12r$

$\underline{45 = b_1 + 12r}$

3. $a_1 q^2 = b_1 + 3r$

$\cancel{675}^{27}\cdot\frac{4}{\cancel{25}} = b_1 + 3r$

$\underline{108 - b_1 = 3r}$

4. $45 = b_1 + 4\cdot 3r$

$45 = b_1 + 4\cdot(108 - b_1)$

$45 = -3b_1 + 4\cdot 108$

$3b_1 = 387 \quad /:3$

Odp: $b_1 = 129$

**Zadanie 11. (0–4)**

Rozwiąż równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

① $\sin 3x + \sin x + \sin 2x = 0$ dla $x \in \langle 0; \pi \rangle$

$2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0$

$\sin 2x \cdot (2\cos x + 1) = 0 \quad \wedge \quad k \in C$

$\sin 2x = 0 \quad \vee \quad 2\cos x + 1 = 0$

$2\cos x = -1 \quad /:2$

$2x = k\pi \quad /:2$

$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{3}$

$\boxed{x = \frac{k\pi}{2}}$

$x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\boxed{x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi} \quad \vee \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$

② dla $x \in \langle 0; \pi \rangle$:

Odp.: $x \in \{0; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \pi\}$

**Zadanie 12. (0–5)**

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których równanie

$$x^2-(m+1)x+m=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste $x_1$ oraz $x_2$, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$$

$$\overbrace{x^2-(m+1)x+m}^{f(x)}=0$$

$$\begin{cases} ① \ x_1 \neq x_2 \rightarrow \Delta > 0 \\ ③ \ x_1; x_2 \neq 0 \\ ② \ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2=\frac{1}{x_1{}^2}+\frac{1}{x_2{}^2} \end{cases}$$

$m = ?$

① $(m+1)^2-4\cdot 1\cdot m>0$

$m^2+2m+1-4m>0$

$m^2-2m+1>0$

$(m-1)^2>0$

$m-1\neq 0$

$m\neq 1$

$Z_1: m\in \mathbb{R}-\{1\}$

③ $x_1, x_2 \neq 0$

$\Downarrow$

$x_1\cdot x_2\neq 0$

$m\neq 0$

$Z_3: m\in\mathbb{R}-\{0\}$

② $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+2=\frac{x_2{}^2+x_1{}^2}{(x_1x_2)^2}$

$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+2=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

$\frac{m+1}{m}+2=\frac{(m+1)^2-2m}{m^2} \quad /\cdot m^2>0$

$m(m+1)+2m^2=m^2+1 \quad$ dla $m\neq 0$

$\cancel{m^2}+m+2m^2-\cancel{m^2}-1=0$

$2m^2+m-1=0$

$\Delta_m=1^2-4\cdot 2\cdot(-1)=3^2$

$m_1=\frac{-1-3}{2\cdot 2}=\frac{-4}{4}=-1$

$m_2=\frac{-1+3}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

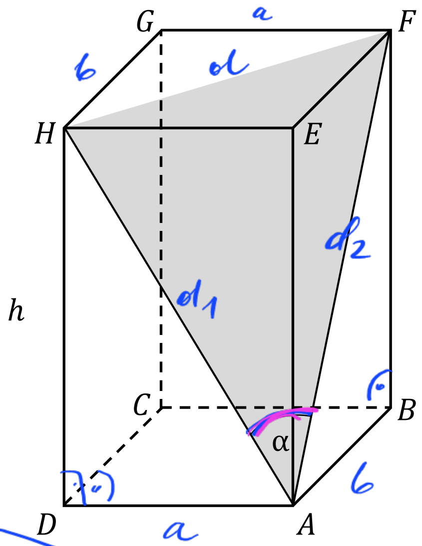
$Z_2: m\in\{-1; \frac{1}{2}\}$

③ $Z_1\cap Z_2\cap Z_3:$

Odp: $m\in\{-1; \frac{1}{2}\}$

## Zadanie 13. (0–5)

Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne $AH$ i $AF$ ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze $\alpha$ takiej, że $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta $AFH$ jest równe $26{,}4$.
Oblicz wysokość $h$ tego graniastosłupa.




$h = ?$

$|AH| = d_1$
$|AF| = d_2$
③ $\sin\alpha = \frac{12}{13}$
② $P_{AFH} = 26{,}4$
$|HF| = d$

① $\Delta HGF$, $\Delta DAH$, $\Delta ABC$ – Tw. Pit.

$$\begin{cases} d^2 = a^2 + b^2 \\ d_1^2 = a^2 + h^2 \\ d_2^2 = b^2 + h^2 \end{cases}$$

② $\frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha = 26{,}4$

$\cancel{\frac{1}{2}} \cdot d_1 d_2 \cdot \frac{\cancel{12}^{6}}{13} = \frac{132}{5} \quad /\cdot \frac{13}{6}$

$\boxed{d_1 d_2 = \frac{286}{5}}$

③ $\alpha \in (0°; 90°)$
$\Downarrow$
$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2}$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{5}{13}}$

④ $\Delta AFH$ (Tw. cosin.)

$d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_2 \cos\alpha$

$\cancel{a^2} + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + h^2 + \cancel{b^2} + h^2 - 2 \cdot \frac{\cancel{286}^{22}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{13}}$

$0 = 2h^2 - 44 \quad /:2$

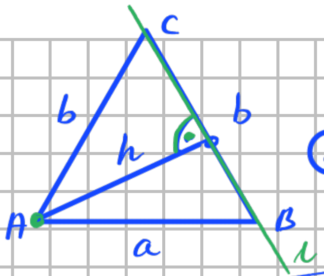
$22 = h^2 \quad /\sqrt{\ }, \; h > 0$

Odp: $h = \sqrt{22}$

I METODA:

## Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A = (-3, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego $ABC$, w którym $|AC| = |BC|$. Pole tego trójkąta jest równe $15$. Bok $BC$ zawarty jest w prostej o równaniu $y = x - 1$. Oblicz współrzędne wierzchołków $B$ i $C$ tego trójkąta.




$A(-3;2)$

③ $P_{ABC} = 15$

② ① $l: y = x - 1$

$b = |BC| = |AC|$

$B(x_B; y_B) = ?$

$C(x_C; y_C) = ?$

① $B, C \in l \;:\; B = (x_B; x_B - 1) \wedge C = (x_C; x_C - 1)$

$\vec{BC} = [x_C - x_B; x_C - 1 - x_B + 1] = [x_C - x_B; x_C - x_B]$

$|BC| = \sqrt{2\cdot(x_C - x_B)^2} = \sqrt{2}\cdot|x_C - x_B| > 0 \rightarrow$ zał.: $x_C \neq x_B$

② $l: x - y - 1 = 0 \wedge A(-3;2)$

$h = d(A,l) = \dfrac{|-3-2-1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

③ $\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot h = 15 \quad /\cdot 2$

$\sqrt{2}\,|x_C - x_B|\cdot 3\sqrt{2} = 30 \quad /:6$

$|x_C - x_B| = 5 \Rightarrow (x_C - x_B)^2 = 25$

I. $x_C - x_B = -5 \vee$ II. $x_C - x_B = 5$

$x_B = x_C + 5 \vee x_B = x_C - 5$

④ $|AC| = |BC|$

$\sqrt{(x_C+3)^2 + (x_C-3)^2} = \sqrt{2\cdot(x_C - x_B)^2} \quad /^2 \quad \wedge \quad x_C \neq x_B$

$2x_C^2 + 18 = 2\cdot 25$

$2x_C^2 = 32 \quad /:2$

$x_C^2 = 16 \quad /\sqrt{\ }$

$\left[\begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_C = -4 \\ y_C = -5 \end{cases}\right] \Rightarrow C = (4;3) \vee C = (-4;-5)$

⑤ dla $x_C = 4$: I. $\begin{cases} x_B = 4+5 = 9 \\ y_B = 8 \end{cases} \vee$ II. $\begin{cases} x_B = 4-5 = -1 \\ y_B = -2 \end{cases}$

oraz:

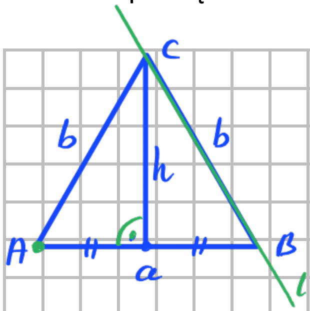
dla $x_C = -4$: I $\begin{cases} x_B = -4+5 = 1 \\ y_B = 0 \end{cases} \vee$ II $\begin{cases} x_B = -4-5 = -9 \\ y_B = -10 \end{cases}$

Odp: $\begin{cases} B = (9,8) \\ C = (4,3) \end{cases} \vee \begin{cases} B = (-1,-2) \\ C = (4;3) \end{cases} \vee \begin{cases} B = (1,0) \\ C = (-4;-5) \end{cases} \vee \begin{cases} B = (-9;-10) \\ C = (-4;-5) \end{cases}$

II METODA

**Zadanie 14. (0–6)**

Punkt $A=(-3,2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego $ABC$, w którym $|AC|=|BC|$. Pole tego trójkąta jest równe $15$. Bok $BC$ zawarty jest w prostej o równaniu $y=x-1$. Oblicz współrzędne wierzchołków $B$ i $C$ tego trójkąta.




$A(-3;2)$

$P_{ABC}=15$

$l: y=x-1$

$a=|AB|$

$B(x_B;y_B)=?$

$C(x_C;y_C)=?$

① $B, C \in l$

$B=(x_B;\ x_B-1) \wedge C=(x_C;\ x_C-1)$

② $\overrightarrow{BC}=[x_C-x_B;\ y_C-y_B]=[x_C-x_B;\ x_C-x_B]$

$\overrightarrow{AB}=[x_B+3;\ y_B-2]=[x_B+3;\ x_B-3]$

$\overrightarrow{AC}=[x_C+3;\ y_C-2]=[x_C+3;\ x_C-3]$

③ $\frac{1}{2} d(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=P_{ABC} \quad /\cdot 2$

$\left|\begin{vmatrix} (x_B+3) & (x_B-3) \\ (x_C+3) & (x_C-3) \end{vmatrix}\right|=2\cdot 15$

$|(x_B+3)(x_C-3)-(x_B-3)(x_C+3)|=30$

$|\cancel{x_Bx_C}-3x_B+3x_C-9-\cancel{x_Bx_C}-3x_B+3x_C+9|=30$

$|-6x_B+6x_C|=30 \quad /:6 \quad \wedge \quad$ zał.: $x_B \neq x_C$

$|x_B-x_C|=5 \xRightarrow{x_B\neq x_C} \left[\begin{array}{l} \text{I. } x_C-x_B=-5 \\ x_B=x_C+5 \end{array} \vee \begin{array}{l} \text{II. } x_C-x_B=5 \\ x_B=x_C-5 \end{array}\right]$

④ $|AC|=|BC|$

$\sqrt{(x_C+3)^2+(x_C-3)^2}=\sqrt{2(x_C-x_B)^2} \quad \wedge \quad x_C\neq x_B$

$\sqrt{2x_C^2+18}=\sqrt{2}\,|x_B-x_C| \quad /^2$

$2x_C^2+18=2\cdot 5^2 \quad /:2$

$x_C^2=16 \quad /\sqrt{\ }$

$\left[\begin{cases} x_C=4 \\ y_C=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_C=-4 \\ y_C=-5 \end{cases}\right] \Rightarrow C=(4;3) \vee C=(-4;-5)$

⑤ dla $x_C=4$: I. $\begin{cases} x_B=4+5=9 \\ y_B=8 \end{cases} \vee$ II. $\begin{cases} x_B=4-5=-1 \\ y_B=-2 \end{cases}$

oraz:

dla $x_C=-4$: I $\begin{cases} x_B=-4+5=1 \\ y_B=0 \end{cases} \vee$ II $\begin{cases} x_B=-4-5=-9 \\ y_B=-10 \end{cases}$

Odp: $\begin{cases} B=(9,8) \\ C=(4,3) \end{cases} \vee \begin{cases} B=(-1,-2) \\ C=(4;3) \end{cases} \vee \begin{cases} B=(1,0) \\ C=(-4;-5) \end{cases} \vee \begin{cases} B=(-9;-10) \\ C=(-4;-5) \end{cases}$

**Zadanie 15. (0–7)**

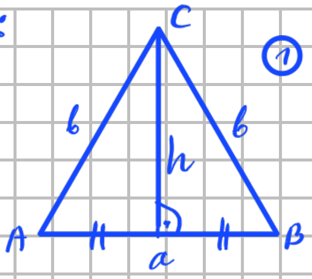
Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne o obwodzie równym $18$.

a) Wykaż, że pole $P$ każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości $b$ ramienia, wyraża się wzorem $P(b) = \frac{(18-2b)\cdot\sqrt{18b-81}}{2}$.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji $P$.

c) Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole.

Z:




① $a+2b=18$

c) $P = NW.$

a) T: $P(b)=\frac{(18-2b)\sqrt{18b-81}}{2}$

b) $D_p = ?$

c) $a, b = ?$

D:

① $\underline{a = 18-2b}$

1a $a>0 \wedge b>0$

$18-2b>0$

$2b<18 \;/:2$

$b<9$

$\underline{b\in(0;9)}$

② $h^2+(\frac{1}{2}a)^2=b^2$

$h^2=b^2-(9-b)^2$

$h^2=b^2-81+18b-b^2$

$h^2=18b-81=9(2b-9) \;/\sqrt{\;}$ dla $\underline{b>4{,}5} \wedge h>0$

$\underline{h=3\sqrt{2b-9}} = \sqrt{18b-81}$

③ $P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h=\frac{1}{2}(18-2b)\cdot\sqrt{18b-81}=P(b)$

$P(b)=\frac{(18-2b)\sqrt{18b-81}}{2}$

cnd

④ $(b\in(0,9) \wedge b>\frac{9}{2}) \Rightarrow D_P: \underline{b\in(4\frac{1}{2};9)}$

⑤ $P(b)=\frac{1}{2}\cdot 2(9-b)\cdot 3\sqrt{2b-9}=3\sqrt{(2b-9)(9-b)^2}=3\cdot\sqrt{f(b)}$

$f(b)=(2b-9)(81-18b+b^2) \wedge D_f=D_P \wedge P(b)\nearrow \Leftrightarrow f(b)\nearrow$

$f'(b)=2(81-18b+b^2)+(2b-9)\cdot(-18+2b)$

$=2(b-9)^2+2(b-9)(2b-9)$

$=2(b-9)[(b-9)+(2b-9)]=2(b-9)(3b-18)$

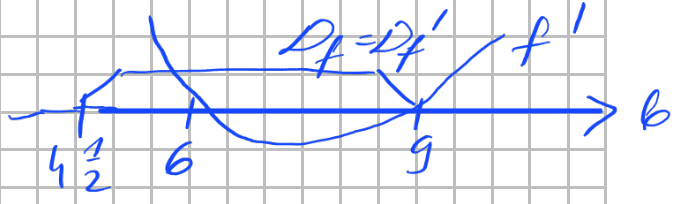
$f'(b)=6(b-9)(b-6) \wedge D_{f'}=D_P=(4\frac{1}{2};9)$

6

$f'(b)=0$ dla $b=6$

$f'>0$ dla $b\in(4\frac{1}{2};\ 6)$

$f'<0$ dla $b\in(6;\ 9)$




$\Downarrow$ f: $\nearrow$ max lok. $\searrow$

FUNKCJA $f(b)$ OSIĄGA MAKSIMUM LOKALNE DLA $b=6$

DLA $b=6$, FUNKCJA $f(b)$ OSIĄGA MAKSIMUM LOKALNE ORAZ NAJWIĘKSZĄ WARTOŚĆ.

$\Downarrow$ $[D_f=D_P \wedge P(b)\nearrow \iff f(b)\nearrow]$

DLA $b=6$ POLE $P(b)$ JEST NAJWIĘKSZE.

7

$b=6 \quad \wedge \quad a=18-2\cdot 6=6$

Odp: b) $D_P$: $b\in(4\frac{1}{2};\ 9)$

c) NAJWIĘKSZE POLE MA TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY O BOKU $a=b=6$