Matura rozszerzona maj 2021

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to ***E-100***.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

DATA: **11 maja 2021 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS PRACY: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

EMAP-R0-**100**-2105

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 27 stron (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
6. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
7. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
8. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
9. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

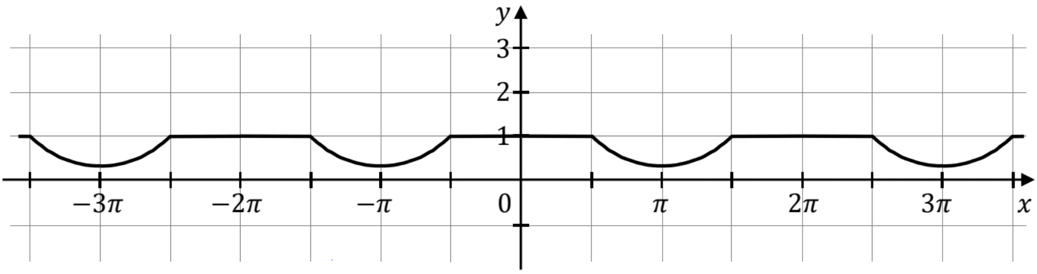
Zadanie 1. (0–1) $= \cos(2\cdot 165^\circ) = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Różnica $\cos^2 165^\circ - \sin^2 165^\circ$ jest równa

A. -1 **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 2. (0–1)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f określonej dla każdej liczby rzeczywistej x.



Jeden spośród podanych poniżej wzorów jest wzorem tej funkcji. Wskaż wzór funkcji f. $k \in C$

A. $f(x) = \frac{\cos x + 1}{|\cos x| + 1}$ $\Rightarrow$ $f(x) = 1$ dla $\cos x \geq 0 \rightarrow f(x) = 1$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$
np: $f(\pi) = \frac{-1+1}{1+1} = 0 \rightarrow$ sprzeczne z wykresem

B. $f(x) = \frac{\sin x + 1}{|\sin x| + 1}$ $\Rightarrow$ $f(x) = 1$ dla $\sin x \geq 0 \rightarrow f(x) = 1$ dla $x \in \langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$
$f(\pi) = 1$

C. $f(x) = \frac{|\cos x| - 2}{\cos x - 2}$ $\Rightarrow$ $f(x) = 1$ dla $x \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle \land k \in C$
$f(\pi) = \frac{1-2}{-1-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \rightarrow$ PASUJE

D. $f(x) = \frac{|\sin x| - 2}{\sin x - 2}$ $\Rightarrow f(\pi) = 1$

Zadanie 3. (0–1) $= (x^2+9)^2 - \overbrace{18x^2}^{(3\sqrt{2}x)^2} = (x^2 - 3\sqrt{2}x + 9)(x^2 + 3\sqrt{2}x + 9)$

Wielomian $W(x) = x^4 + 81$ jest podzielny przez

A. $x - 3$ **B.** $x^2 + 9$ **C.** $x^2 - 3\sqrt{2}x + 9$ **D.** $x^2 + 3\sqrt{2}x - 9$

Zadanie 4. (0–1)

Liczba różnych pierwiastków równania $3x + |x - 4| = 0$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

I Met:

$\begin{cases} x \geq 4 \\ 4x - 4 = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} x < 4 \\ 2x + 4 = 0 \end{cases}$

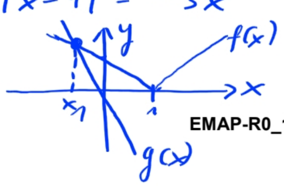
$\begin{cases} x \geq 4 \\ x = 1 \end{cases} \lor \begin{cases} x < 4 \\ x = -2 \end{cases}$

$x = \emptyset \lor x = -2$

Odp: 1 pierwiastek

II Met (WYKRESY)

$\underbrace{|x-4|}_{f(x)} = \underbrace{-3x}_{g(x)}$



BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 5. (0–2)

Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^2-(1-2n)^2}{(2n-1)^2}$. $= \ldots = \frac{9-4}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

1	2	5

Zadanie 6. (0–3)

Niech $\log_2 18 = c$. Wykaż, że $\log_3 4 = \frac{4}{c-1}$.

Z: $\log_2 18 = c$

T: $\log_3 4 = \frac{4}{c-1}$

D:

(1) $\underline{\log_2 18} = \log_2(2\cdot 3^2) = \log_2 2 + 2\log_2 3$

$= 1 + 2\cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 2} = 1 + \frac{2}{\log_3 2} =$

$= 1 + \frac{2\cdot 2}{2\cdot \log_3 2} = \underline{1 + \frac{4}{\log_3 4}}$

(2) $\log_2 18 = c$

$1 + \frac{4}{\log_3 4} = c$

$\frac{4}{\log_3 4} = c - 1 \quad /:4$

$\frac{1}{\log_3 4} = \frac{c-1}{4} \quad /()^{-1}$

$\underline{\log_3 4 = \frac{4}{c-1}}$

cnd.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–3)

Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x-1}{1-x} \le \frac{2+2x}{5x}$$

Zał: $x \neq 1 \wedge x \neq 0$

$D: x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$

$$\frac{2x-1}{1-x} - \frac{2+2x}{5x} \le 0$$

$$\frac{5x(2x-1) - (1-x)\cdot 2(1+x)}{5x(1-x)} \le 0$$

$$\frac{10x^2 - 5x - 2(1-x^2)}{-5x(x-1)} \le 0$$

$$\frac{12x^2 - 5x - 2}{-5x(x-1)} \le 0 \quad \wedge$$

$$\overbrace{12x^2 - 5x - 2}^{f(x)}$$

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 12 \cdot (-2)$

$= 25 + 96 = 11^2$

$x_1 = \frac{5-11}{2\cdot 12} = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{5+11}{2\cdot 12} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$$\frac{12\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{-5x(x-1)} \le 0$$

Odp: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left(0; \frac{2}{3}\right\rangle \cup (1; \infty)$

Odpowiedź: ....

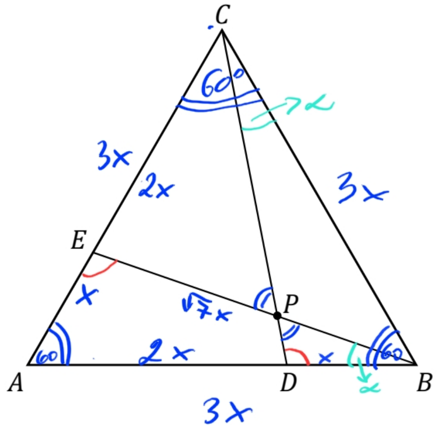
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	7.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 8. (0–3)

Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na bokach AB i AC wybrano punkty – odpowiednio – D i E takie, że $|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|$. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).

$y = |CD|$

T: $P_{DBP} = \frac{1}{21} P_{ABC}$



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

(1) $\Delta ABE \equiv \Delta BCD$ z wł. (bkb) $\Rightarrow (x; 60°; 3x)$

stąd: $\underline{|EB| = |CD| = y}$

więc: $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BEA| = \varphi$

$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ABE| = \alpha$

stąd: $\Delta ABE \sim \Delta DBP$ z wł. (kkk) $\Rightarrow$ skala podob.: $k = \frac{x}{y}$

$k^2 = \frac{P_{DBP}}{P_{DBC}} = \frac{x^2}{y^2}$

(2) ΔDBC – Tw. cosin.

$y^2 = x^2 + (3x)^2 - 2x \cdot 3x \cdot \cos 60°$

$y^2 = 10x^2 - 6x^2 \cdot \frac{1}{2}$

$\underline{y^2 = 7x^2} \Rightarrow \frac{P_{DBP}}{P_{DBC}} = \frac{x^2}{7x^2} = \frac{1}{7}$

$\boxed{P_{DBP} = \frac{1}{7} \cdot P_{DBC}}$

(3) $P_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{2}$

$P_{DBC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 \quad \wedge \quad P_{ABC} = \frac{(3x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} x^2$

$\frac{P_{DBC}}{P_{ABC}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}x^2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_{3}\sqrt{3}x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{P_{DBC} = \frac{1}{3} P_{ABC}}$

(4) $P_{DBP} = \frac{1}{7} \cdot P_{DBC} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} P_{ABC}$

$\underline{P_{DBP} = \frac{1}{21} P_{ABC}}$ c.n.d.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 9. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

$Z = \{1000, 1001, 1002; \ldots\ 9999\}$

$n = \overline{\overline{Z}} = 9000$

$k = 1$

A – wylosowano liczbę $15|x$

B = — " — " $18|x$

$P(A|B) = ?$

dla $c, a, b \in \mathbb{N}$

(0) $\overline{\overline{\Omega}} = 9000$

(1) $1000 \leq 18b \leq 9999 \ /:18$

$55\frac{5}{9} \leq b \leq 555\frac{1}{2}$

$b = \{56; 57; \ldots\ 555\} \Rightarrow \overline{\overline{b}} = \underline{500 = \overline{\overline{B}}}$

(2)

$1000 \leq 15a \leq 9999 \ /:15$

$66\frac{2}{3} \leq a \leq 666\frac{3}{5}$

$a = \{67; 68; \ldots; 666\} \Rightarrow \overline{\overline{a}} = \underline{600 = \overline{\overline{A}}}$

(3) $(15| \wedge 18|) \Rightarrow 90|$

$1000 \leq 90c \leq 9999 \ /:90$

$11\frac{1}{9} \leq c \leq 111\frac{1}{10}$

$c = \{12; 13; \ldots; 111\} \Rightarrow \overline{\overline{c}} = \underline{100 = \overline{\overline{A \cap B}}}$

(4)

$$\underline{\underline{P(A|B)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{100}{500} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

II Metoda:

$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\overline{B}} = 500$

$\overline{\overline{A_1}} = \overline{\overline{A \cap B}} = 100$

$$\underline{\underline{P(A_1) = P(A|B)}} = \frac{\overline{\overline{A_1}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{100}{500} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

Odp: $P(A|B) = \frac{1}{5}$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	9.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 10. (0–4)

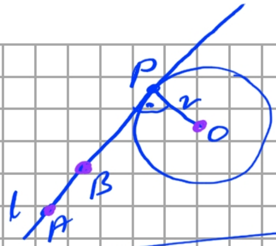
Prosta przechodząca przez punkty $A = (8, -6)$ i $B = (5, 15)$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $O = (0, 0)$. Oblicz promień tego okręgu i współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą AB.

$A=(8;-6) \in l$

$B=(5;15) \in l$

$O=(0,0)$ – środek okręgu O_1

$O_1: x^2+y^2=r^2$



$r=?$ ✓

$P=(x;y)=?$

(1) $\begin{cases} A: 8a+b=-6 \\ B: 5a+b=15 \end{cases}$

$3a=-21 \; /:3$

$a=-7$

$b=15+35=50$

$l_{AB}: y=-7x+50$

$l_{AB}: 7x-y+50=0$

(2) $r=d(O;l)$

$r=\frac{|0-0+50|}{\sqrt{49+1}}=\frac{50}{\sqrt{50}}=\sqrt{50}$

$r=5\sqrt{2}$

(3) $\begin{cases} O_1: x^2+y^2=50 \\ l: y=-7x+50 \end{cases}$

$x^2+(50-7x)^2=50$

$x^2+50^2-700x+49x^2=50$

$50x^2-700x+2450=0 \; /:50$

$x^2-14x+49=0$

$(x-7)^2=0$

$x=7$

$y=-7\cdot 7+50$

$P=(7;1) \leftarrow y=1$

Odp: $r=5\sqrt{2}$, $P=(7;1)$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian kwadratowy

$$4x^2 - 2(m+1)x + m$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \qquad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$f(x) = 4x^2 - 2(m+1)x + m$

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

$x_1 \neq x_2 \rightarrow \Delta_x > 0$ (1)

(2) $x_1, x_2 \neq 0 \rightarrow f(0) \neq 0$ (2)

(3) $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

$m = ?$

(1) $4(m+1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot m > 0 \quad / : 4$

$m^2 + 2m + 1 - 4m > 0$

$(m-1)^2 > 0 \Rightarrow Z_1: m \in R - \{1\}$

(2) $f(0) \neq 0 \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow Z_2: m \in R - \{0\}$

(3) $x_1 + x_2 \leq \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$

$\frac{2(m+1)}{4} \leq \frac{2(m+1)}{4} : \frac{m}{4}$

$\frac{m+1}{2} \leq \frac{m+1}{2} \cdot \frac{4}{m}$

$\frac{m+1}{2} - \frac{2(m+1)}{m} \leq 0$

$\frac{m^2 + m - 4m - 4}{2m} \leq 0$

$\frac{m^2 - 3m - 4}{2m} \leq 0 \quad / \cdot 2m^2 > 0$

$2m(m-4)(m+1) \leq 0$

$Z_3: m \in (-\infty; -1\rangle \cup (0; 4\rangle$

$Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 \Rightarrow$ Odp: $m \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 4\rangle$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	11.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 12. (0–5)

Rozwiąż równanie $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. $/ \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos x - \sin x) = 0$

$\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x) = 0$

$(\cos x - \sin x) \cdot [\sqrt{2}(\cos x + \sin x) - 1] = 0$

(1) $\cos x = \sin x$ $\vee$ (2) $\sqrt{2} \cdot (\cos x + \sin x) - 1 = 0$

$\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$x \overset{I}{=} \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \vee \quad x \overset{IV}{=} -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \quad \wedge \quad k \in C$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sprzeczne.

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge k \in C$

dla $x \in \langle 0; \pi \rangle$

$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 1 \quad / : \sqrt{2}$

$\cos x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad / : \sqrt{2}$

$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

$x - \frac{\pi}{4} \overset{I}{=} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x - \frac{\pi}{4} \overset{IV}{=} -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x_2 = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \vee \quad x_3 = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$

dla $x \in \langle 0; \pi \rangle$: $x_2 = \frac{7\pi}{12}$, $x_3 \notin \langle 0, \pi \rangle$

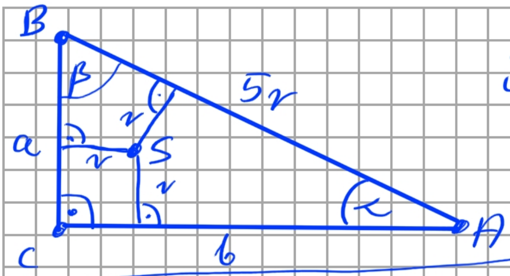
Odp: $x = \{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}\}$

Odpowiedź: ....

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator</td><td>Nr zadania</td><td>12.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td></tr>
</table>

Zadanie 13. (0–4)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest pięć razy krótszy od przeciwprostokątnej tego trójkąta. Oblicz sinus tego z kątów ostrych trójkąta ABC, który ma większą miarę.



$\underbrace{\alpha < \beta}$

$\Downarrow$

zał. $\underbrace{a < b}$

$\sin\beta = \,?\, = \frac{b}{5r}$

(1) $r = \frac{a+b-5r}{2}$

$2r = a+b-5r$

$\underbrace{a = 7r - b}$

(2) $a^2+b^2 = (5r)^2$

$(a+b)^2 - 2ab = 25r^2$

$49r^2 - 2ab = 25r^2$

$24r^2 = 2ab \quad /: (2 \cdot b) > 0$

$\underbrace{a = \frac{12r^2}{b}}$

(3) $7r - b = \frac{12r^2}{b} \quad / \cdot b$

$7br - b^2 = 12r^2$

$b^2 - 7br + 12r^2 = 0 \rightarrow$ (albo z Δ_b obliczyć)

$\left(b - \frac{7r}{2}\right)^2 - \frac{49r^2}{4} + \frac{48r^2}{4} = 0$

$\left(b - \frac{7r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} \quad /\sqrt{\ }$

$\left|b - \frac{7r}{2}\right| = \frac{r}{2}$

$b = \frac{7r}{2} + \frac{r}{2} \quad \vee \quad b = \frac{7r}{2} - \frac{r}{2}$

$\begin{cases} b = 4r \\ a = 7r - 4r = 3r \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} b = 3r \\ a = 7r - 3r = 4r \end{cases}$

sprzeczne dla $b > a$

$\Downarrow$

$\underbrace{b = 4r}$

(4) $\sin\beta = \frac{b}{5r} = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}$

Odp: $\sin\beta = \frac{4}{5}$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	13.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 14. (0–6)

Dane są parabola o równaniu $y = x^2$ oraz punkty $A = (0, 2)$ i $B = (1, 3)$ (zobacz rysunek). Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC, których wierzchołek C leży na tej paraboli. Niech m oznacza pierwszą współrzędną punktu C.

a) Wyznacz pole P trójkąta ABC jako funkcję zmiennej m.

b) Wyznacz wszystkie wartości m, dla których trójkąt ABC jest ostrokątny.

$f(x) = x^2$

$A = (0,2)$

$B = (1;3)$

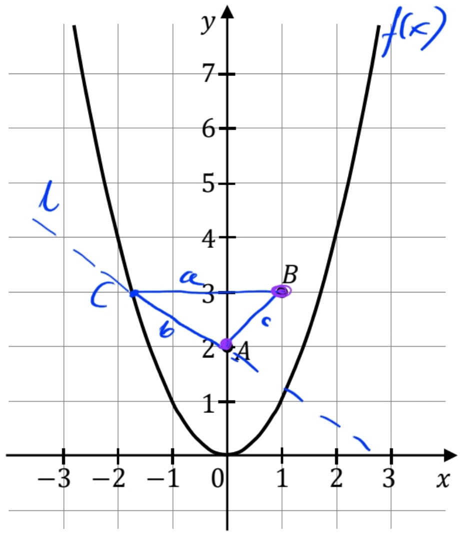
(1) $C = (m ; y_c) \in f(x)$

b) Δ_{ABC} - jest ostrokątny

$a = |BC|$

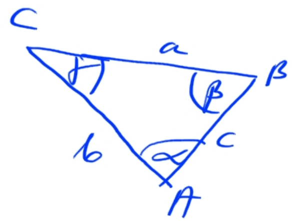
$b = |AC|$

$c = |AB|$



a) $P_{ABC} = P(m) = ?$

b) $m = ?$



(1) $C = (m ; m^2)$

(2) $\overrightarrow{BC} = [m-1; m^2-3] \rightarrow |BC| = \sqrt{(m-1)^2 + (m^2-3)^2} = a$

$\overrightarrow{AB} = [1; 1] \rightarrow |AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = c$

$\overrightarrow{AC} = [m ; m^2-2] \rightarrow |AC| = \sqrt{m^2 + (m^2-2)^2} = b$

$P(m) = \frac{1}{2} |1 \cdot (m^2-2) - 1 \cdot m| = \frac{1}{2} |m^2 - m - 2|$

(3)

$a^2 = m^2 - 2m + 1 + m^4 - 6m^2 + 9 = m^4 - 5m^2 - 2m + 10$

$b^2 = m^2 + m^4 - 4m^2 + 4 = m^4 - 3m^2 + 4$

$c^2 = 2$

Δ ostrokątny $\rightarrow$ z Tw. Pitagorasa (też z Tw. cosinusów) otrzymujemy trzy zależności

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} b^2 + c^2 > a^2 \\ a^2 + c^2 > b^2 \\ a^2 + b^2 > c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} b^2 - a^2 + c^2 > 0 \\ a^2 - b^2 + c^2 > 0 \\ a^2 + b^2 - c^2 > 0 \end{cases}$$

(4) UPRASZCZAM LEWE STRONY UKŁADU NIERÓWNOŚCI

$$\begin{cases} b^2+c^2-a^2 = b^2-a^2+c^2 = 2m^2+2m-4 = 2(m^2+m-2) \\ a^2+c^2-b^2 = a^2-b^2+c^2 = -2m^2-2m+8 = -2(m^2+m-4) \\ a^2+b^2-c^2 = 2m^4-8m^2-2m+12 = 2(m^4-4m^2-m+6) \end{cases}$$

Z CZEGO OTRZYMUJEMY:

$\underline{I}$ $b^2-a^2-c^2>0$

$m^2+m-2>0$

$(m+2)(m-1)>0$

Z_I: $\underline{m\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)}$

$\underline{II}$ $a^2-b^2+c^2>0$

$m^2+m-4<0$

$(m+\frac{1}{2})^2<\frac{1}{4}+\frac{16}{4}$ $/\sqrt{\ }$

$|m+\frac{1}{2}|<\frac{\sqrt{17}}{2}$

Z_{II}: $\underline{m\in\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)}$

$\approx -2{,}56$ $\qquad\approx 1{,}56$

$Z_I \cap Z_{II}$: $\underline{m\in\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};-2\right)\cup\left(1;\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)}$

$\underline{III}$ $a^2+b^2-c^2>0$

$m^4-4m^2-m+6>0$

$(m^2-2)^2-4-m+6>0$

$(m^2-2)^2-(m-2)>0$

$\underbrace{(m^2-2)^2}_{\geq 0} > \underbrace{m-2}_{<0}$

$(\text{dla } Z_I \cap Z_{II})$

ZAUWAŻAMY, ŻE DLA

$m\in\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};-2\right)\cup\left(1;\underbrace{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}}_{\approx 1{,}56}\right)$

NIERÓWNOŚĆ JEST ZAWSZE SPEŁNIONA, bo WÓWCZAS: $m-2<0$

SKORO NIERÓWNOŚĆ JEST PRAWDZIWA DLA WSZYSTKICH $m\in Z_I\cap Z_{II}$, TO

$(Z_I\cap Z_{II}\cap Z_{III}) = (Z_I\cap Z_{II})$

Odp: $m\in\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};-2\right)\cup\left(1;\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 15. (0–7)

Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności $144\ \mathrm{m}^3$. Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:

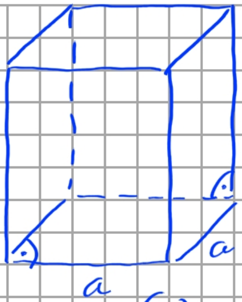
– 100 zł za $1\ \mathrm{m}^2$ dna

– 75 zł za $1\ \mathrm{m}^2$ ściany bocznej.

K - koszt wykonania zbiornika

$K = 100a^2 + 75 \cdot 4 \cdot aH$ [zł.]

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.



(1) $V = a^2 \cdot H = 144\ m^3$ [m]

$a, H \in (0\ m; 9\ m)$

(3) $K = 100a^2 + 75 \cdot 4 \cdot aH = min$ | $a, H = ?$

(1) $a^2 \cdot H = 144 \ /: a^2 \Rightarrow \boxed{H = \frac{144}{a^2}}$

(2) $\begin{cases} H > 0 \\ H < 9 \end{cases}$ $\frac{144}{a^2} < 9 \ / \cdot \frac{a^2}{9}$

$a^2 > \frac{144}{9} \ / \sqrt{\ }, a \in (0, 9)$

$a > 4 \rightarrow \boxed{D:\ a \in (4, 9)}$

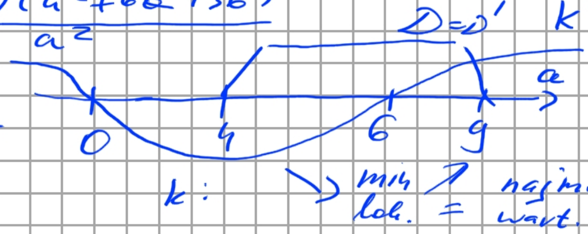
(3) $K(a) = 100a^2 + 300 \cdot a \cdot \frac{144}{a^2} = 100a^2 + \frac{300 \cdot 144}{a}$

$= 100 \cdot \frac{a^3 + 432}{a} = 100\left(a^2 + \frac{432}{a}\right)$

(4) $K'(a) = 100\left(2a - \frac{432}{a^2}\right) = 200 \cdot \frac{a^3 - 216}{a^2}$

$= 200 \cdot \frac{(a-6)(a^2+6a+36)}{a^2}$

(5) K = min dla



$\boxed{a = 6\ m}$ $\Leftarrow$

$H = \frac{144}{6^2}$

$\boxed{H = 4\ m}$

Odp: $a = 6\ m$, $H = 4\ m$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)