MATURA
PODSTAWA
7.05. 2019

Zad. 1 <1p>

$\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2 = \underline{\underline{2}}$

A

Zad. 2 <1p>

$n = 2^{14} \cdot 5^{15}$ | ilość cyfr $n = ?$

$n = 2^{14} \cdot 5^{14} \cdot 5^1 = 10^{14} \cdot 5 = 5 \cdot 10^{14}$

5 z 14 zerami $\Rightarrow$ 15 cyfr.

B

Zad. 3 <1p>

STYCZEŃ – PROWIZJA $= 4\%$

LUTY — — " — $= (4-1)\% = 3\%$

$x = ?$

$4\% - 100\%$

$(4-3)\% = 1\% - x$

$x = \frac{1\% \cdot 100\%}{4\%} = \underline{\underline{25\%}}$

B

Zad. 4 <1p>

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{a} = 1 \quad | \cdot 20a$ | $a = ?$

$5a + 4a + 20 = 20a$

$20 = 11a \quad | : 11$

$\underbrace{a = \frac{20}{11}}$

D

Zad. 5 <1p>

$$\begin{cases} ax+y=4 \\ -2x+3y=2a \end{cases} \quad \text{zał: } \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \qquad \Bigg| \quad a=?$$

$$(1)\ \begin{cases} 2a+2=4 \\ -2\cdot 2+3\cdot 2=2a \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a=2 & /:2 \\ 2=2a & /:2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ a=1 \end{cases}$$

Odp: $\underline{a=1}$ B

Zad. 6 <1p>

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-3}=0 \qquad \Big| \quad x=?$$

(1) $x-3\neq 0$

$x\neq 3$

$\underline{D=\mathbb{R}-\{3\}}$

(2) $(x-1)(x+2)=0$

$x-1=0 \ \vee \ x+2=0$

$x=1 \ \vee \ x=-2$

Odp: $\underline{x=\{-2;1\}}$ C

2 rozwiązanie

Zad. 7 <1p>

(1) $f(x)=3(x+1)-6\sqrt{3}$ | $x_0=?$

(2) $f(x_0)=0$

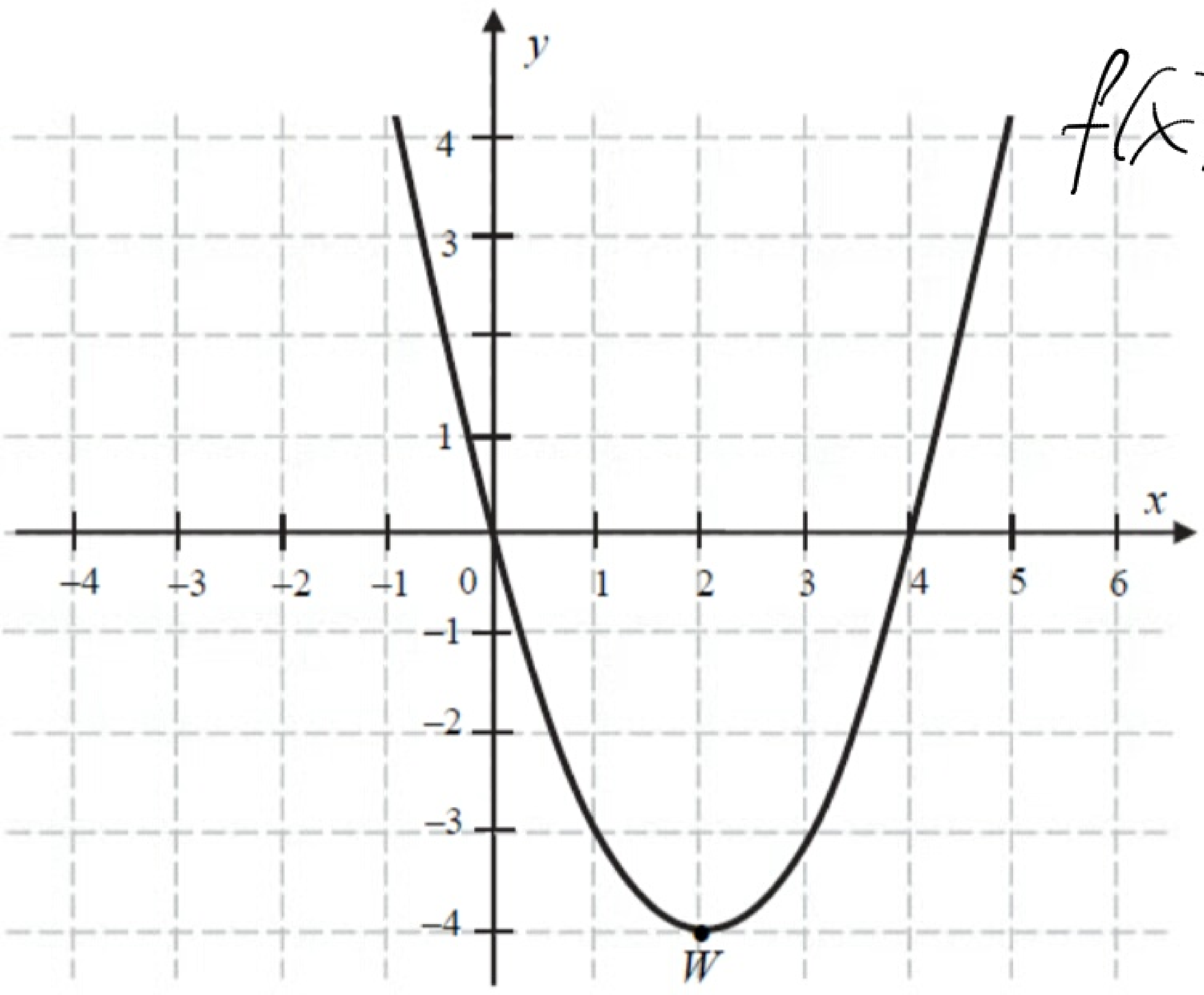
(1) $f(x)=3x+3-6\sqrt{3}$

(2) $3x+3-6\sqrt{3}=0$

$3x=6\sqrt{3}-3 \quad /:3$

$\underline{x_0=2\sqrt{3}-1}$ C

INFORMACJE DO ZADAŃ: 8, 9, 10.



$f(x)$

$f(x) = ax^2 + bx + c$
$= a(x - x_1)(x - x_2)$
$= a(x-p)^2 + q$

$W = (p; q) = (2; -4)$
$x_1 = 0$
$x_2 = 4$

Zad. 8 <1p>

$ZW_f = \langle -4; \infty)$ C

Zad. 9 <1p>

$f_{max} = ?$ dla $x \in \langle 1; 4\rangle$

$f_{max} = f(4) = 0$ D

Zad. 10 <1p.>

oś symetrii $f(x) = ?$

$x = 2$ D

Zad. 11 <1p>

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
$a_1 = 7$
(1) $a_8 = -49$

$S_8 = a_1 + a_2 + \ldots + a_8 = ?$

(1) $7 + 7r = -49$
$7r = -56 \quad /:7$
$\boxed{r = -8}$

(2) $S_8 = \frac{2 \cdot 7 + 7 \cdot (-8)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{8}^{4}$
$S_8 = (14 - 56) \cdot 4$
$S_8 = -42 \cdot 4$
$S_8 = -168$ A

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$

Zad. 12 <1p>

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n > 0 \Rightarrow q > 0$

(1) $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$

$q = ?$

(1) $\frac{\cancel{a_1} q^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{a_1} \cancel{q^2}} = \frac{1}{9} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{9} \quad / \sqrt{\ } \land \quad q > 0$

$q = \frac{1}{3}$

A

Zad. 13 <1p>

$\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = ?$

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad / \sqrt{\ } \land \cos\alpha > 0$

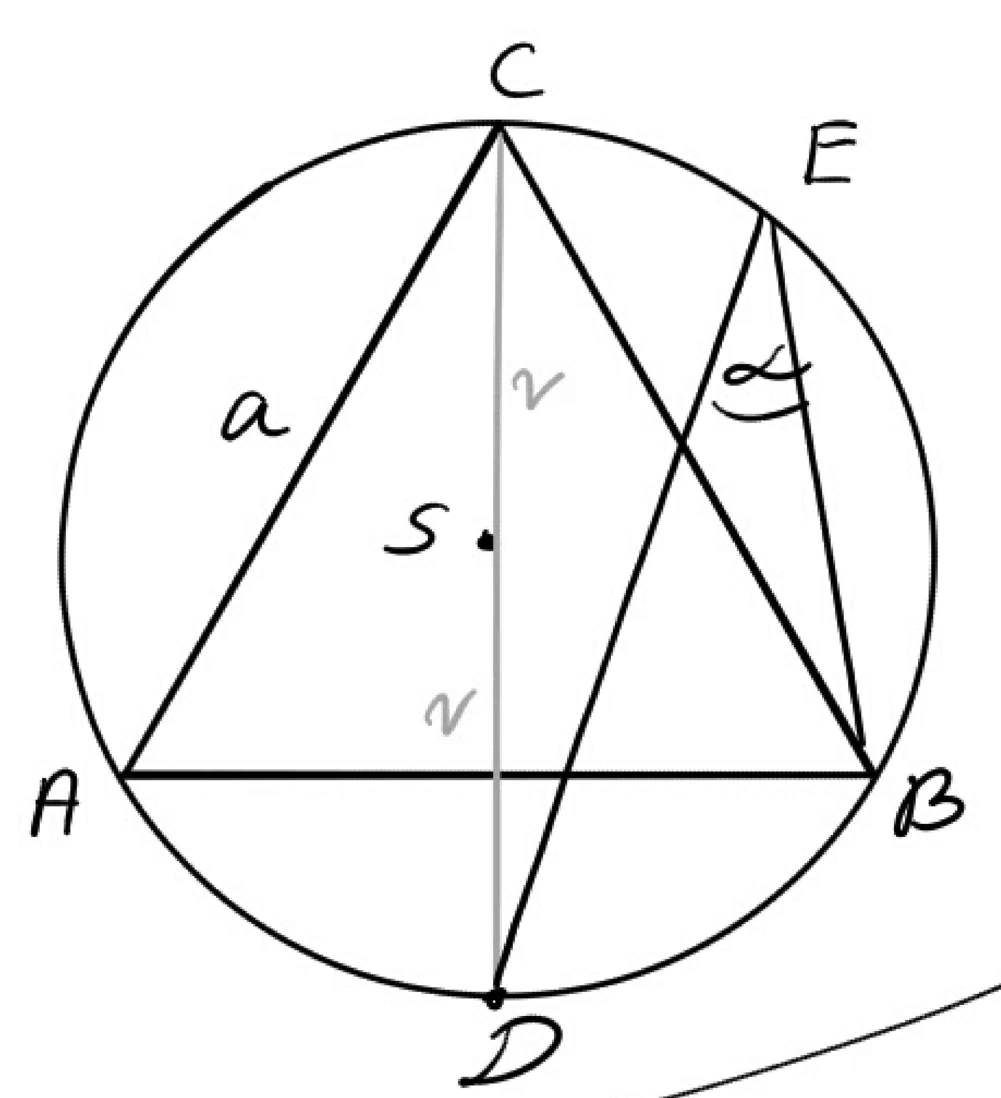
$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

D

Zad. 14 <1p.>

$|AB| = |AC| = |BC| = a$

$|CS| = |SD| = r$



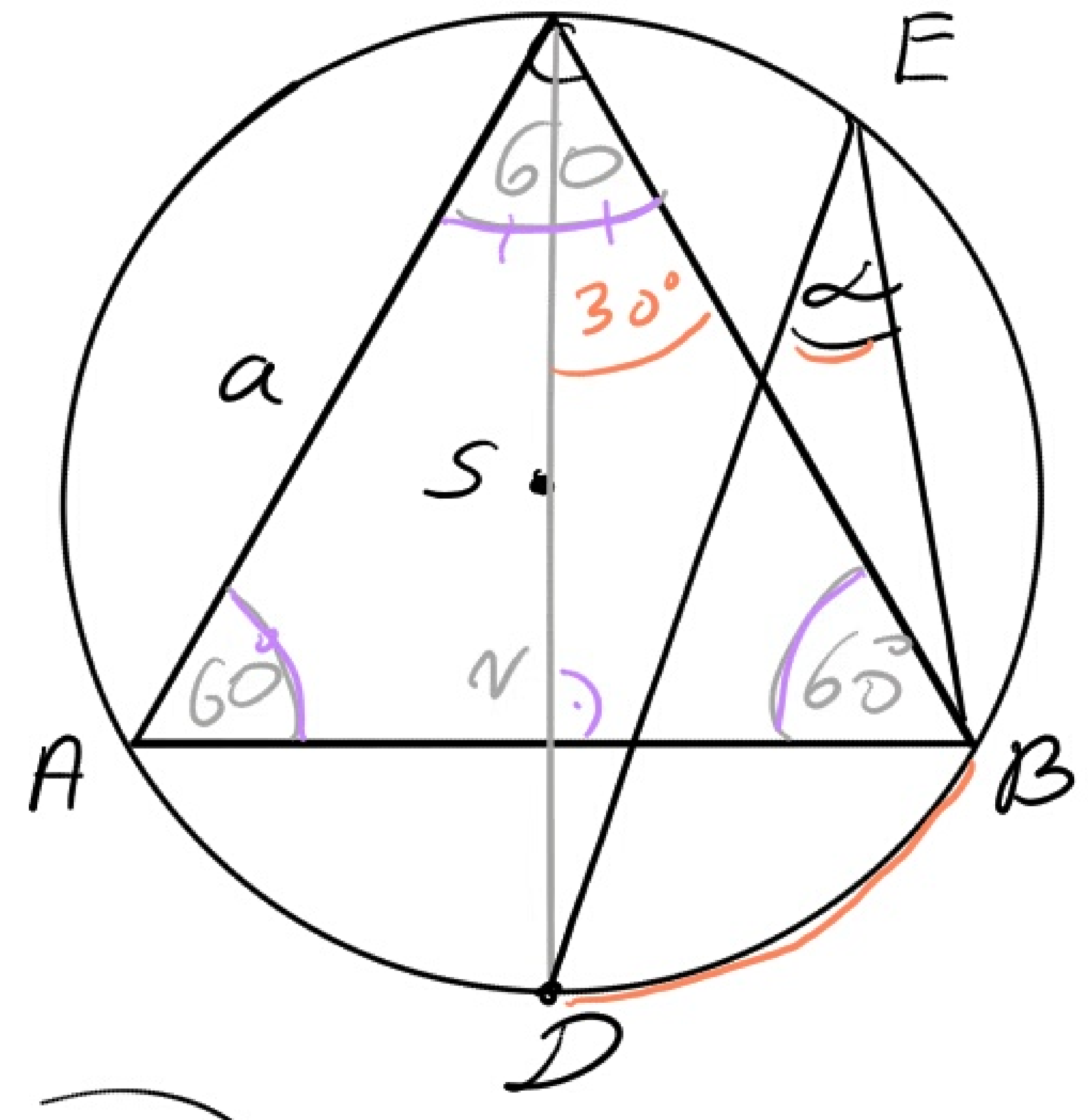
$\alpha = ?$

(1) ΔABC – równoboczny o kątach 60°

(2) DC – dwusieczna $\sphericalangle ACB$, więc $|\sphericalangle DCB| = 30^\circ$

(3) $\overset{\frown}{DB}$: KĄTY WPISANE OPARTE NA ŁUKU $\overset{\frown}{DB}$

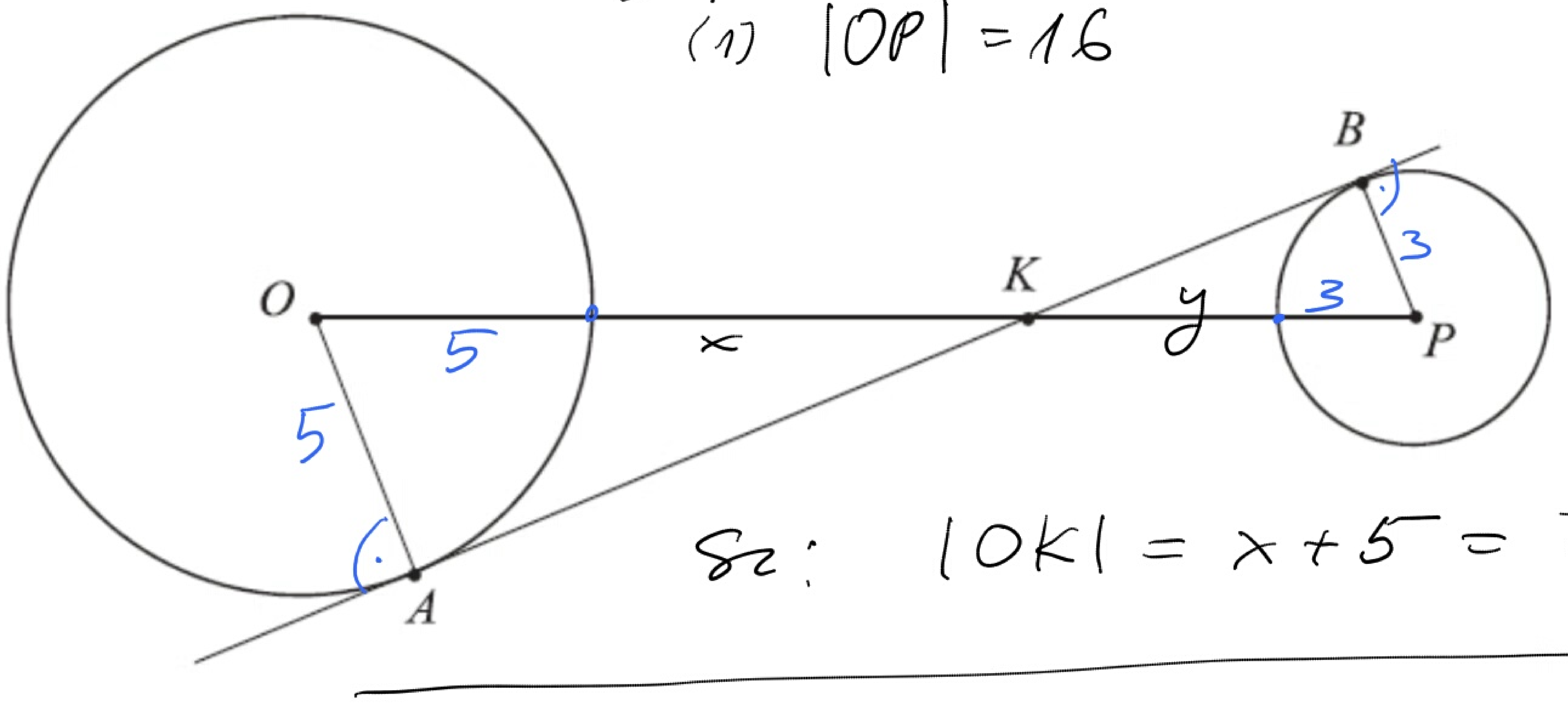
$\alpha = |\sphericalangle DCB| = 30^\circ$



A

Zad. 15 <1p.>

D:
(1) $|OP| = 16$



Sz: $|OK| = x + 5 = ?$

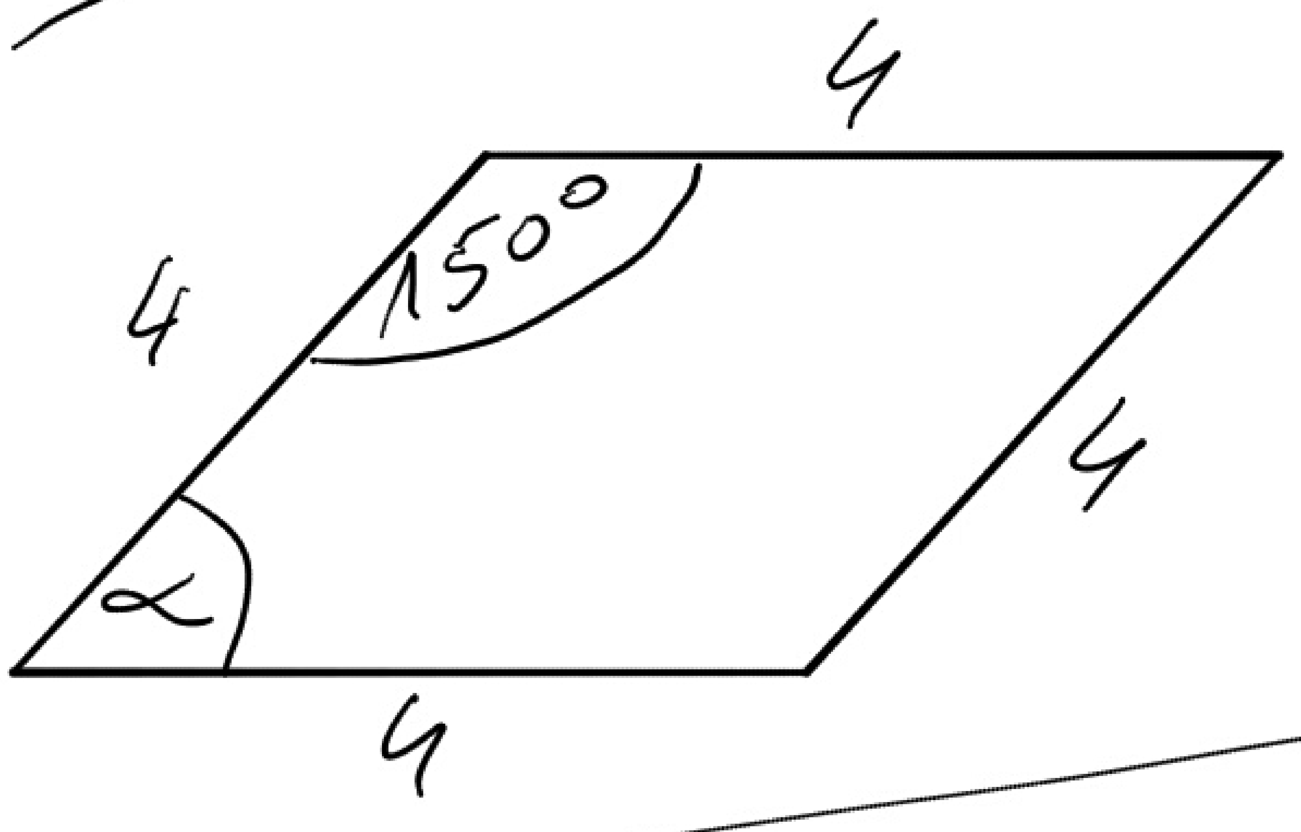
(1) $5 + x + y + 3 = 16$
$x + y = 8$
$y = 8 - x$

(2) $\frac{5}{5+x} = \frac{3}{3+y}$
$5(3+y) = 3(5+x)$
$\cancel{15} + 5y = \cancel{15} + 3x$
$5(8-x) = 3x$
$40 - 5x = 3x$
$40 = 8x \quad /:8$
$x = 5$

$|OK| = 10$

C

Zad. 16 <1p.>



$P_{\square} = ?$

(1) $\alpha = 180° - 150° = 30°$

(2) $P_{\square} = 4^2 \cdot \sin 30° = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$

A

Zad. 17 <1p>

$m = ?$

$k: \ y = (2m+2)x - 2019$

$l: \ y = (3m-3)x + 2019$

(1) $k \parallel l$

(1) $3m \quad 3 = 2m+2$

$\underline{\underline{m = 5}}$

D

Zad. 18 <1p>

$a = ?$

$b = ?$

$k: \ y = ax+b$

$l: \ y = -4x+1$

(1) $k \perp l$

(2) $P = (\underset{x}{\tfrac{1}{2}} ; \underset{y}{0}) \in k$

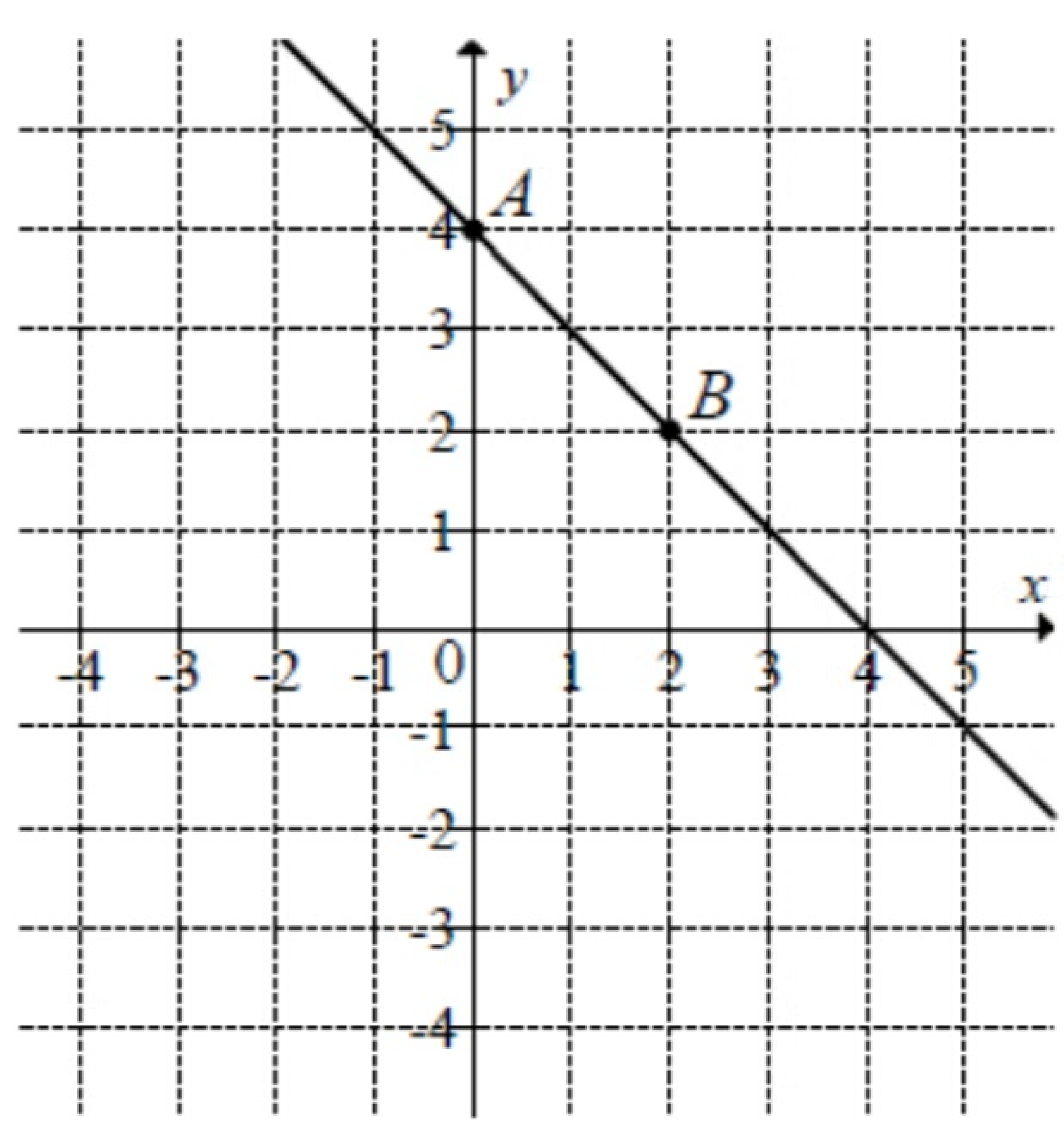
(1) $-4 \cdot a = -1 \quad /:(-4)$

$\underbrace{a = \frac{1}{4}} \implies k: \ y = \frac{1}{4}x + b$

(2) $P \in k \implies 0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + b \implies \underbrace{b = -\frac{1}{8}}$

B

Zad. 19 <1p>



Dane:

(1) $A = (0;4) \in f(x) = ax+b \implies b = 4$

$B = (2;2) \in f(x)$

$f(x) \xrightarrow{S(0,0)} g(x) = -f(-x)$

szukane: $g(x) = ?$

(1) $f(x) = ax + 4$

$2 = 2a + 4$

$-2 = 2a \quad /:2$

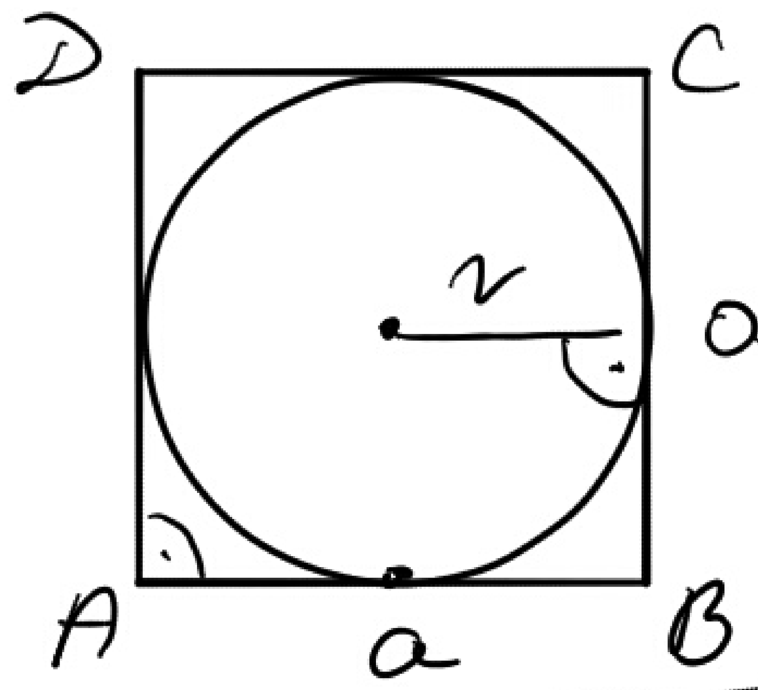
$\underbrace{a = -1} \implies f(x) = -x + 4$

(2) $\underline{\underline{g(x)}} = -f(-x) = -\left[-(-x) + 4\right] = -(x+4) = \underline{\underline{-x-4}}$

C

Zad. 20 <1p>

$A = (-2; 5)$
$B = (4; -1)$



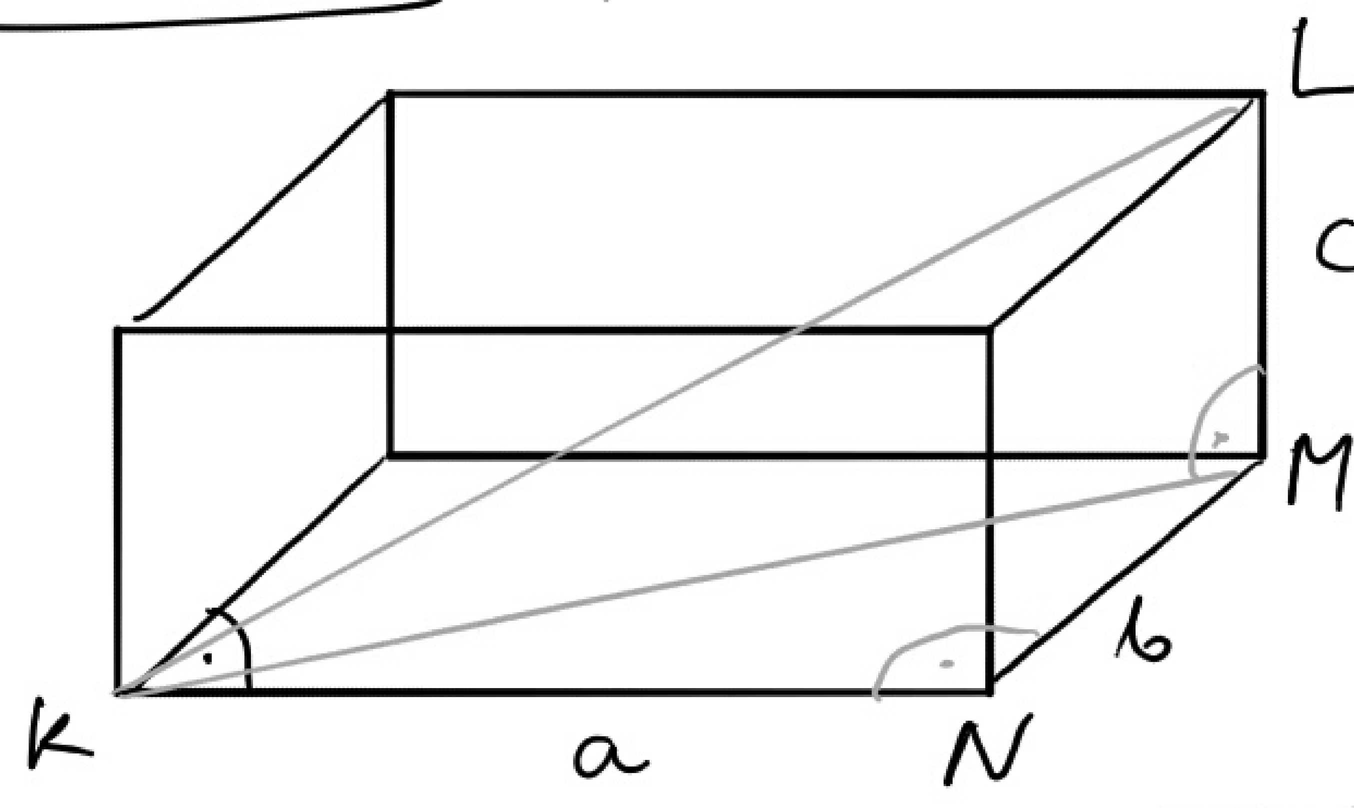
$2r = ?$

$$\underline{\underline{2r}} = a = |\overline{AB}| = \sqrt{(4+2)^2 + (-1-5)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 36} = \underline{\underline{6\sqrt{2}}}$$

C

Zad. 21 <1p>



$a = 5\,dm$
$b = 3\,dm$
$c = 2\,dm$

$|\overline{KL}| = ?$
$[0{,}01\,dm]$

(1) ΔKNM:

$$|KM|^2 = a^2 + b^2$$
$$|KM|^2 = 5^2 + 3^2$$
$$|KM|^2 = 25 + 9$$
$$\underbrace{|KM|^2 = 34}$$

(2) ΔKML:

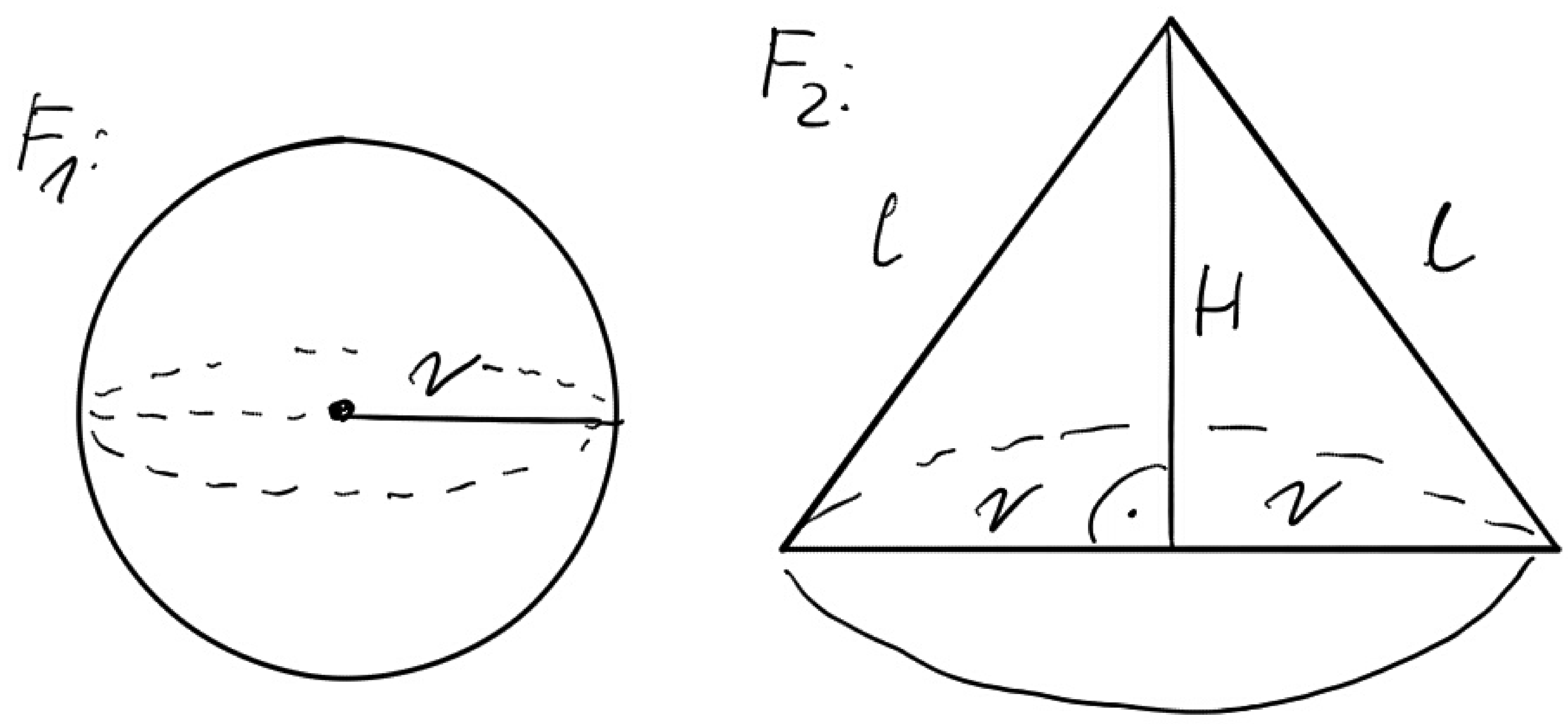
$$|KL|^2 = |KM|^2 + c^2$$
$$|KL|^2 = 34 + 4$$
$$|KL|^2 = 38 \quad /\sqrt{\ }$$
$$|KL| \approx 6{,}164414\ldots$$

$[0{,}01]$

$$|\overline{KL}| \approx \underline{\underline{6{,}16}}\ [dm]$$

B

Zad. 22 <1p>



$r = 4$

$P_1 = P_2$ | $l = ?$

(1) $4\pi r^2 = \pi r^2 + \pi r \cdot l \quad | : (\pi r) \neq 0$

$4r = r + l$

$3 \cdot r = l \quad \wedge \quad r = 4$

$\underbrace{l = 12}$

D

Zad. 23 <1p>

$Z = \{4, 8, 21, a, 16; 25\}$ | $a = ?$

$Me = 14 \rightarrow a \in (8; 14)$

(1) $Z = \{4, 8, \underline{a, 16}, 21, 25\}$

$Me = \frac{a+16}{2} = 14 \Rightarrow a + 16 = 28$

$\underbrace{a = 12}$

B

Zad. 24 <1p>

$Z = \{0; 2; 5\}$

$n = \overline{\overline{Z}} = 3$

$k = 5$

K! – KOLEJNOŚĆ ISTOTNA
(LICZBY 5 CYFROWE)

P – POWTÓRZENIA

$\overline{\overline{\Omega}} = ?$

$$\overline{\overline{\Omega}} = \underset{\substack{\cancel{0}\\2\\5}}{\underline{2}} \cdot \underset{\substack{0\\2\\5}}{\underline{3}} \cdot \underset{\substack{0\\2\\5}}{\underline{3}} \cdot \underset{\substack{0\\2\\5}}{\underline{3}} \cdot \underset{\substack{0\\2\\5}}{\underline{3}} = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = \underline{\underline{162}}$$

C

Zad. 25 <1p>

$n = 40 = 35b + 5cz$

$k = 1$

A – wylosowano kulę czerwoną

$P(A) = ?$

(1) $\overline{\overline{\Omega}} = n = 40$

(2) $\overline{\overline{A}} = 5$

(3) $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \dfrac{5}{40} = \underline{\underline{\dfrac{1}{8}}}$

A

Zad. 26 <2p>

$$(x^3-8)\cdot(x^2-4x-5)=0$$

$x^3-8=0 \quad \vee \quad x^2-4x-5=0$

$x^3=8 \quad /\sqrt[3]{\ }$

$x_3=2$

$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=16+20=36$

$\sqrt{\Delta}=6$

$x_1=\frac{4-6}{2\cdot1}=\frac{-2}{2}=-1$

$x_2=\frac{4+6}{2\cdot1}=\frac{10}{2}=5$

Odp: $x=\{-1;2;5\}$

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $3x^2-16x+16>0$.

$a=3;\ b=-16;\ c=16$

$\Delta=b^2-4ac=(-16)^2-4\cdot3\cdot16=16\cdot4=64>0$

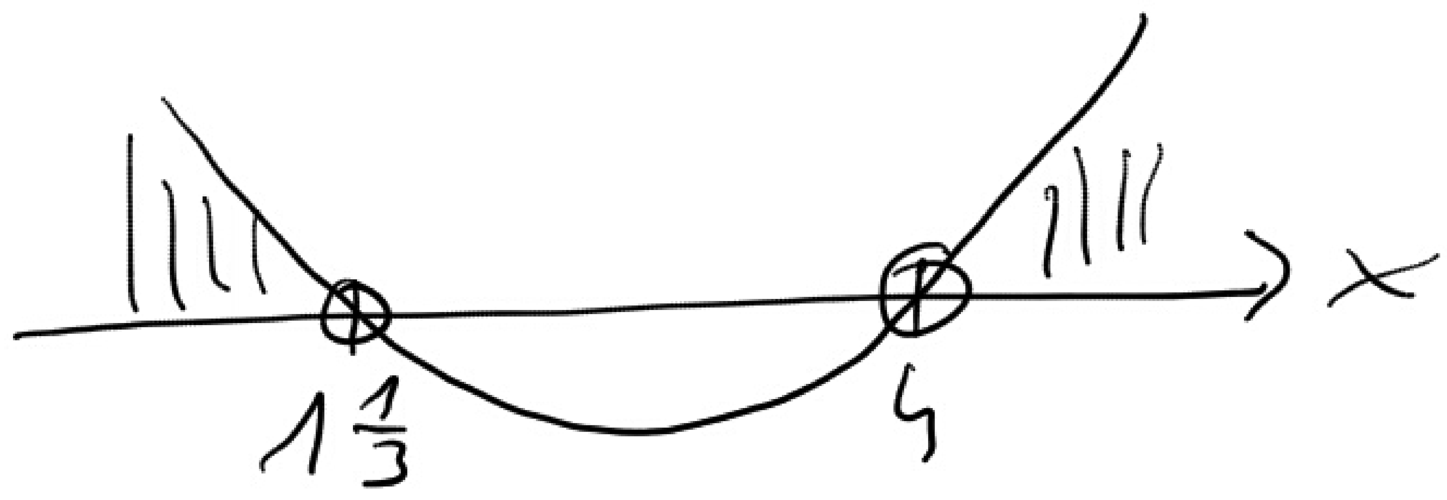
$\sqrt{\Delta}=8$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{16-8}{2\cdot3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{16+8}{2\cdot3}=\frac{24}{6}=4$

Odp:

$x\in(-\infty;1\frac{1}{3})\cup(4;\infty)$



Zadanie 28. *(2 pkt)*

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$3a^2-2ab+3b^2\geq0.$$

$$2a^2+\underbrace{a^2-2ab+b^2}_{\text{wzór skr. mn.}}+2b^2\geq0$$

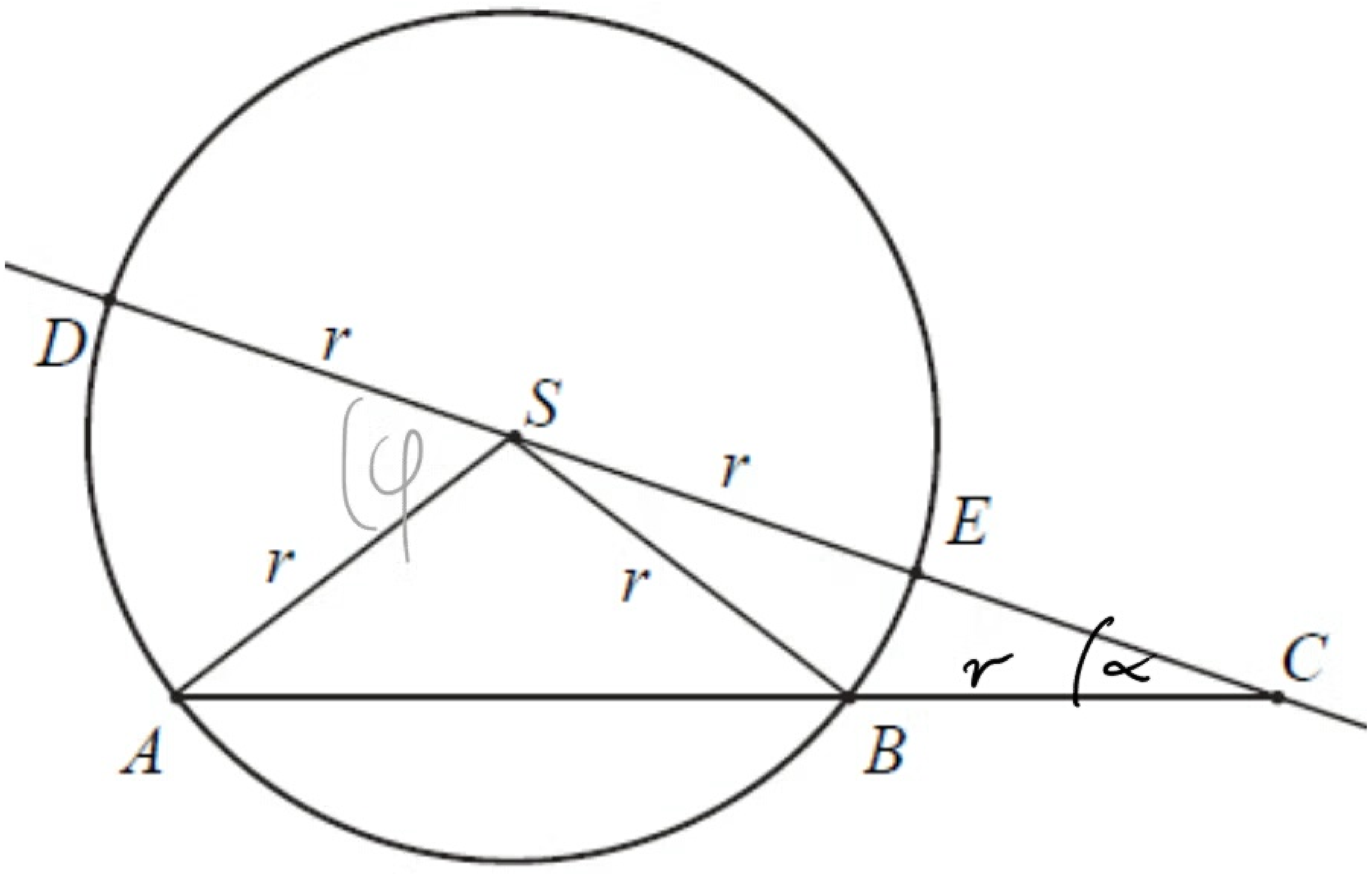
$$2a^2+2b^2+(a-b)^2\geq0$$

$$\underbrace{\underbrace{2(a^2+b^2)}_{\geq0}+\underbrace{(a-b)^2}_{\geq0}}_{\geq0}\geq0$$

cnd.

Zadanie 29. *(2 pkt)*

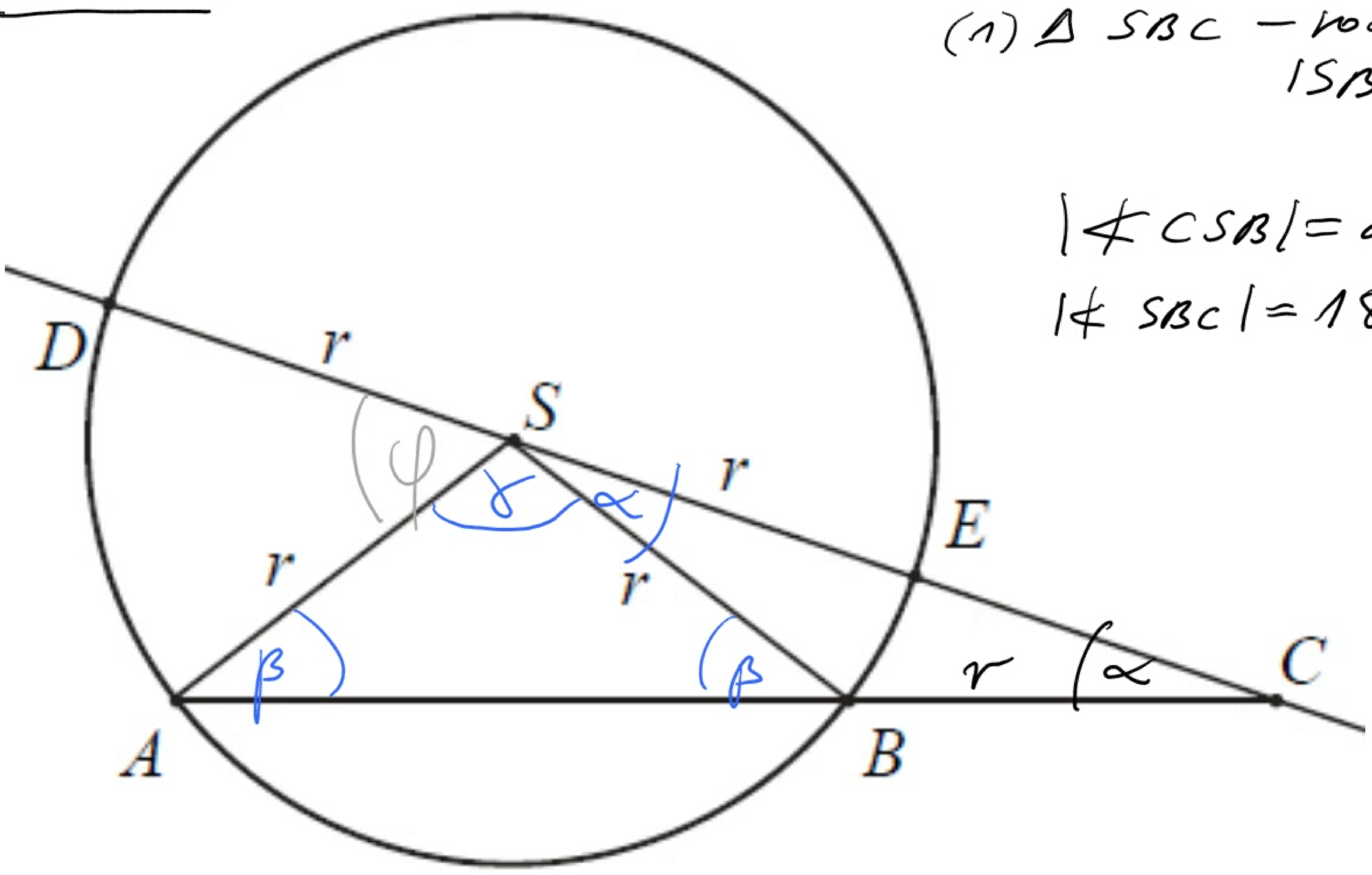
Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Na przedłużeniu cięciwy AB poza punkt B odłożono odcinek BC równy promieniowi danego okręgu. Przez punkty C i S poprowadzono prostą. Prosta CS przecina dany okrąg w punktach D i E (zobacz rysunek). Wykaż, że jeżeli miara kąta ACS jest równa α, to miara kąta ASD jest równa 3α.



Zał:
$|\sphericalangle ACS| = \alpha$

Teza:
$\underbrace{|\sphericalangle ASD|}_{\varphi} = 3\alpha$

Dowód:



(1) ΔSBC – równoramienny
$|SB| = |BC|$
$\Downarrow$
$|\sphericalangle CSB| = \alpha$
$|\sphericalangle SBC| = 180^\circ - 2\alpha$

(2) $\beta = 180^\circ - |\sphericalangle SBC| = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$

(3) ΔABS: $\gamma + 2\beta = 180^\circ$
$\gamma + 2\cdot 2\alpha = 180^\circ$
$\underline{\gamma = 180^\circ - 4\alpha}$

(3) $\varphi + \gamma + \alpha = 180^\circ$
$\varphi = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha = |\sphericalangle ASD|$

$\underline{|\sphericalangle ASD| = 3\alpha}$ c.n.d.

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą.

$Z = \{\bar{1}; 2; \bar{3}; 4; \bar{5}\}$

$n = \overline{\overline{Z}} = 5$

$k = 2$

ki – kolejność istotna

P – powtórzenia

A – zd. p.n.t.z. iloczyn liczb jest liczbą nieparzystą (NP)

$P(A) = ?$

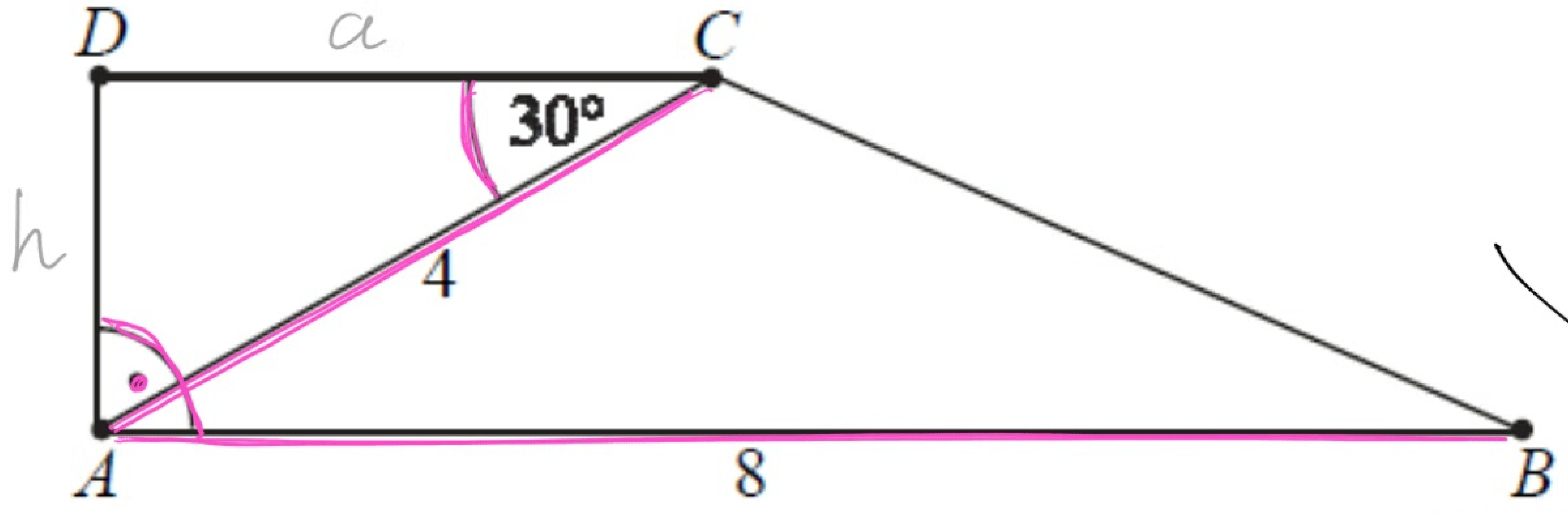
(1) $\overline{\overline{\Omega}} = \underline{5} \cdot \underline{5} = 25$

(2) $\overline{\overline{A}} = \underset{NP}{\underline{3}} \cdot \underset{NP}{\underline{3}} = 9$

(3) $P(A) = \frac{9}{25}$

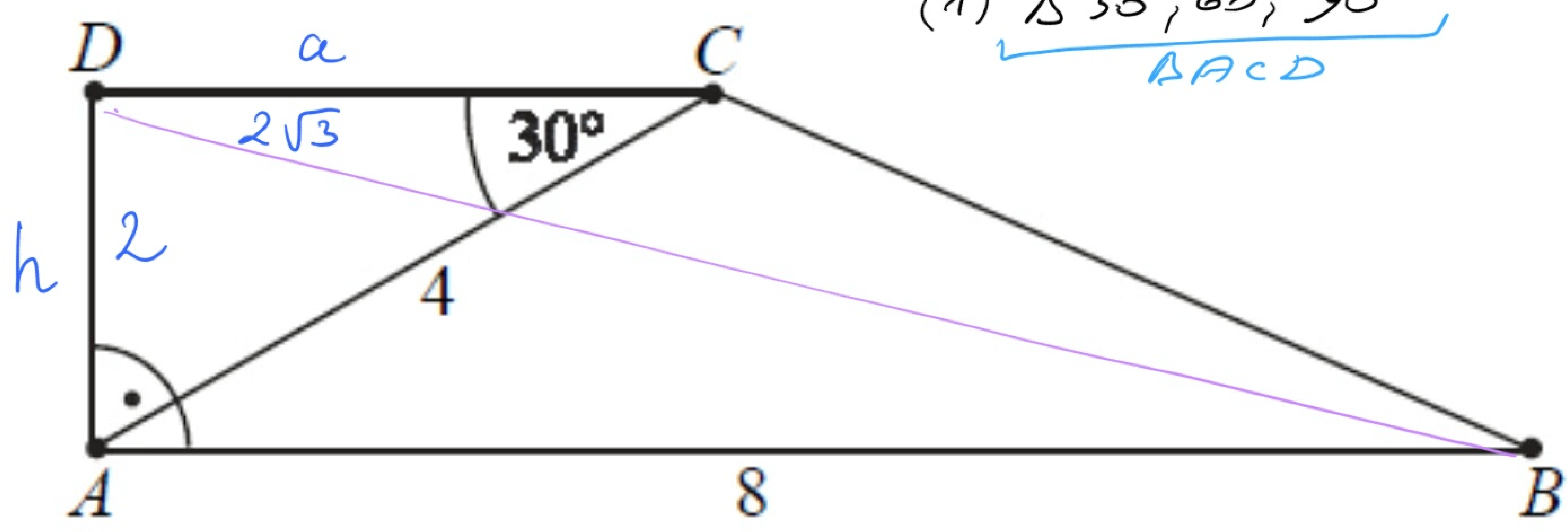
Zadanie 31. *(2 pkt)*

W trapezie prostokątnym *ABCD* dłuższa podstawa *AB* ma długość 8. Przekątna *AC* tego trapezu ma długość 4 i tworzy z krótszą podstawą trapezu kąt o mierze $30°$ (zobacz rysunek). Oblicz długość przekątnej *BD* tego trapezu.



$|BD| = ?$

(1) $\Delta\ 30°, 60°, 90°$ — ΔACD



(2) ΔABD — Tw. Pit. $\wedge$ $|BD| = x$

$x^2 = h^2 + 8^2 \quad \wedge \quad h = 2$

$x^2 = 4 + 64$

$x^2 = 68 \quad /\sqrt{} \quad \wedge \quad x > 0$

$x = 2\sqrt{17}$

Odp: $|BC| = 2\sqrt{17}$ [j]

Zadanie 32. *(4 pkt)*

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, jest równa 16.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz liczbę k, dla której $a_k = -78$.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$r = -4$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \rightarrow \quad S_6 = \frac{2a_1 + 5r}{2} \cdot 6$

(1) $\frac{S_6}{6} = 16 \quad / \cdot 6$

a) $a_1 = ?$ ✓

b) $k = ?$

(3) $a_k = -78$

(1) $S_6 = 16 \cdot 6$

$\frac{2a_1 + 5 \cdot (-4)}{2} \cdot 6 = 16 \cdot 6 \quad /:6$

$\frac{2a_1 - 20}{2} = 16$

$a_1 - 10 = 16 \Rightarrow \underline{a_1 = 26}$

(2) $a_n = 26 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 30$

(3) $a_k = -78$

$-4k + 30 = -78$

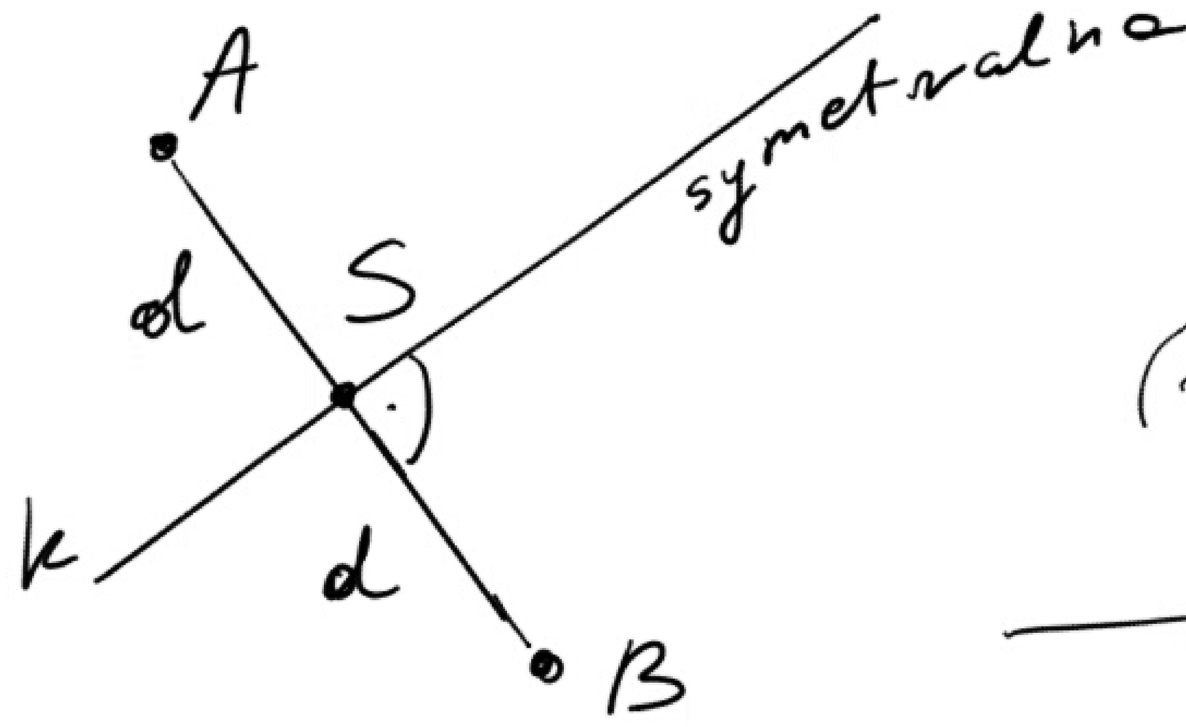
$-4k = -108 \quad /:(-4)$

$\underline{k = 27}$

Odp: $a_1 = 26$; $k = 27$

Zadanie 33. *(4 pkt)*

Dany jest punkt $A=(-18,10)$. Prosta o równaniu $y=3x$ jest symetralną odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu B.



$A=(-18;10)$

$B=(x_B;y_B)$

$B=?$

(1) $k: y=3x$

(1) $k \perp l_{AB}: \quad y=-\frac{1}{3}x+b$

$A \in l_{AB}: \quad 10=-\frac{1}{3}\cdot(-18)+b$

$10=6+b$

$\underline{b=4} \longrightarrow l_{AB}: \quad \underline{y=-\frac{1}{3}x+4}$

(2) $S \in (k \cap l_{AB}): \quad \begin{cases} y=3x \\ y=-\frac{1}{3}x+4 \end{cases}$

$3x=-\frac{1}{3}x+4 \quad /\cdot 3$

$9x=-x+12$

$10x=12 \quad /:10$

$x=\frac{12}{10}=\frac{6}{5} \implies y=3\cdot\frac{6}{5}=\frac{18}{5}=3{,}6$

$\underline{S=\left(\frac{6}{5};\frac{18}{5}\right)}$

(3) $S=S_{AB}: \quad \left(\frac{-18+x_B}{2};\frac{10+y_B}{2}\right)=\left(\frac{6}{5};\frac{18}{5}\right)$

$\frac{-18+x_B}{2}=\frac{6}{5} \quad /\cdot 10 \quad \wedge \quad \frac{10+y_B}{2}=\frac{18}{5} \quad /\cdot 10$

$-90+5x_B=12 \qquad 50+5y_B=36$

$5x_B=102 \quad /:5 \qquad 5y_B=-14 \quad /:5$

$x_B=\frac{102}{5}=20\frac{2}{5} \qquad y_B=-2\frac{4}{5}$

Odp: $B=\left(20\frac{2}{5};-2\frac{4}{5}\right)$

Zadanie 34. *(5 pkt)*

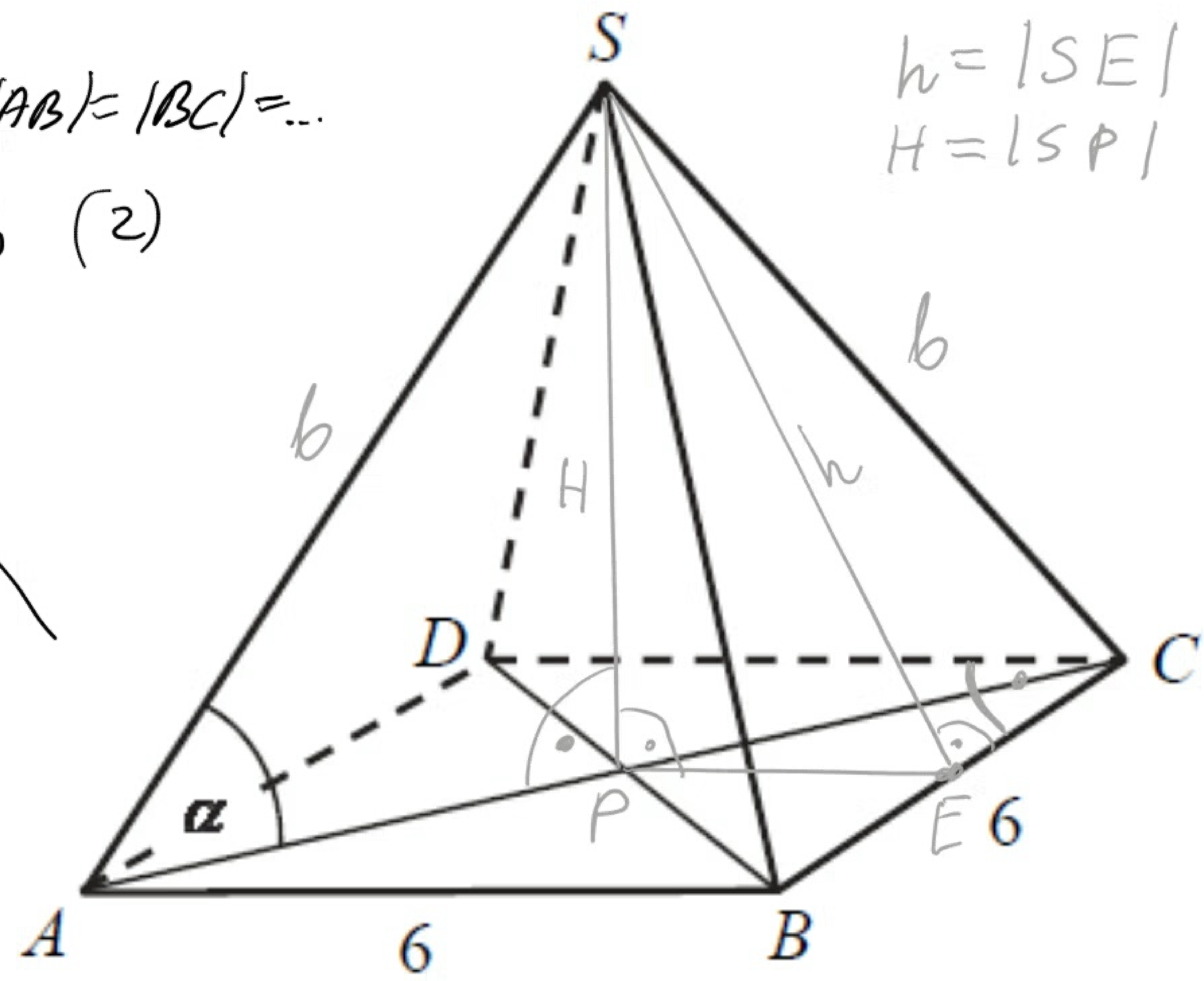
Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest cztery razy większe od pola jego podstawy. Kąt α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta α.

$a = 6 = |AB| = |BC| = \ldots$

$h = |SE|$

$H = |SP|$

$\cos\alpha = ?$ | $P_c = 4 \cdot P_p$ (2)



(1) $\Delta ABC - 45°, 45°, 90°$:

$|AC| = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(2) $P_c = 4 \cdot P_p$

$P_p + P_b = 4 P_p$

$P_b = 3 P_p$

$\cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot a \cdot h = 3 \cdot a^2$

$2 \cdot 6 \cdot h = 3 \cdot 6^2 \quad / : 12$

$\underline{h = 9}$

(3) ΔSEC – Tw. P.t.

$b^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$b^2 = 81 + 9 = 90 \quad / \sqrt{\ }, \ b > 0$

$\underbrace{b = 3\sqrt{10}} = |AS| = |CS| \ldots$

(4) ΔAPS:

$|AP| = \frac{1}{2}|AC| = 3\sqrt{2}$

$\cos\alpha = \frac{|AP|}{|AS|} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Odp: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$